

2020 年全国硕士研究生入学考试 数学三试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上。

1. 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - a}{x - a} = b$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x - a} =$

- A. $b \sin a$ B. $b \cos a$ C. $b \sin f(a)$ D. $b \cos f(a)$

2. $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln|1+x|}{(e^x - 1)(x-2)}$ 第二类间断点个数

- A.1 B.2 C.3 D.4

3. 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有连续导数, 则

- A. $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$ 是奇函数
B. $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$ 是偶函数
C. $\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)] dt$ 是奇函数
D. $\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)] dt$ 是偶函数

4. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2, 6)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n}$ 的收敛区间为 ()

- A. $(-2, 6)$ B. $(-3, 1)$ C. $(-5, 3)$ D. $(-17, 15)$

5. 设 4 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 不可逆, a_{12} 的代数余子式 $A_{12} \neq 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $A^* x = 0$ 的通解为 ()

- A. $x = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数
B. $x = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数
C. $x = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_3 + k_3 \alpha_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数
D. $x = k_1 \alpha_2 + k_2 \alpha_3 + k_3 \alpha_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数

6. 设 A 为 3 阶矩阵, a_1, a_2 为 A 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量, a_3 为 A 的属于特征值

-1 的特征向量, 则满足 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的可逆矩阵为

A. $(a_1 + a_3, a_2, -a_3)$ B. $(a_1 + a_2, a_2, -a_3)$ C. $(a_1 + a_3, -a_3, a_2)$ D. $(a_1 + a_2, -a_2, a_2)$

7. 设 A, B, C 为三个随机事件且

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0,$$

则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为 ().

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{12}$

8. 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N\left(0, 0; 1, 4; -\frac{1}{2}\right)$, 随机变量中服从标准正态分布且为 X 独立的是 ().

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

9. 设 $z = \arctan[xy + \sin(x+y)]$, 则 $dz|_{(0,\pi)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 曲线 $x + y + e^{2xy} = 0$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. Q 表示产量, 成本 $C(Q) = 100 + 13Q$, 单价 p , 需求量 $q(p) = \frac{800}{p+3} - 2$. 则工厂取得利润最大时的产量为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. 设平面区域 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}, 0 \leq x \leq 1 \right\}$, 则 D 绕 y 轴旋转所成旋转体体积为

13. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$

14. 随机变量 X 的概率分布 $P\{X=k\} = \frac{1}{2^k}, k=1, 2, 3, \dots$ Y 表示 X 被 3 整除的余数, 则 $E(Y) =$

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答写出文字说明、

证明过程或演算步骤. 15. 已知 a, b 为常数, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$ 与 $\frac{b}{n^a}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时为等价无穷小,

求 a, b .

16. 求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值

17. 设函数 $f(x)$ 满足 $y'' + 2y' + 5y = 0$, 且 $f(0) = 1, f'(0) = -1$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式.

(2) 设 $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x) dx$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

18. 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$, 连续函数 $f(x, y)$ 满足 $f(x, y) = y\sqrt{1-x^2} + x \iint_D f(x, y) dx dy$, 求 $\iint_D xf(x, y) dx dy$

19. 已知 $f(x)$ 具有连续导数在 $[0, 2]$ 上, $f(0) = f(2) = M$, 且 $M = \max_{x \in [0, 2]} |f(x)|$. 则

(1) 证明存在 $\xi \in (0, 2)$, 有 $|f'(\xi)| \geq M$.

(2) 证明若对任意 $x \in (0, 2)$, $|f'(\xi)| \leq M$, 则 $M = 0$.

20. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 得

$g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2, a \geq b$

求 (1) a, b ; (2) 求正交矩阵 Q

21. A 为二阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha), \alpha$ 不是 A 的特征向量且非 0

(1) 证明 P 是可逆矩阵

(2) $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵

22. 二维随机变量 (X, Y) 在正域 $D = \{(x, y) | 0 < y < \sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布, 令

$Z_1 = \begin{cases} 1 & X - Y > 0 \\ 0 & X - Y \leq 0 \end{cases}$ $Z_2 = \begin{cases} 1 & X + Y > 0 \\ 0 & X + Y \leq 0 \end{cases}$ 求 (1) (Z_1, Z_2) 概率分布, (2) 求 Z_1, Z_2 相关系数

23. 设某元件使用寿命 T 的分布函数 $F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 θ, m 为参数且大于零.

(1) 求概率 $P\{T > t\}$ 与 $P\{T > s + t | T > s\}$, 其中 $s > 0, t > 0$.

(2) 设取 n 个这样的元件做寿命实验, 测得寿命 t_1, t_2, \dots, t_n , 其中 m 已知. 求 θ 的最大似然估计值.

爱启航考研