2020 年全国硕士研究生招生考试（数学三）参考答案及解析

1.D

解析 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f\left(x\right)-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\sin\dfrac{f(x)-a}{2}\cos\dfrac{f(x)-a}{2}}{x-a}=b\cos f(a)$

2. C

解析：$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln(1+x)}{(e^{x}-1)(x-2)}$，则可疑点为 $x=1$，$x=-1$，$x=0$，$x=2$，

$\lim\limits_{x\to 1^{+}}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to -1^{+}}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^{+}}f(x)=\dfrac{e^{-1}}{-2}=\lim\limits_{x\to 0^{-}}f(x)$，

故选 C

3.A

解析 $\cos f(x)$ 和 $f'(x)$ 均为偶函数，则 $\int_0^x\left[\cos f\left(t\right)+f'\left(t\right)\right]\mathrm{d}t$ 为奇函数

4.B

解析 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2,6)$ 所以收敛半径为 4 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛半径为 2，所以收敛区间为 $(-3,1)$.

5. C

解析：由于 $\boldsymbol{A}$ 是不可逆的，所以 $r(\boldsymbol{A})<4$，又由于 $A_{12}\neq 0$，所以 $r(\boldsymbol{A})\geq 3$，故 $r(\boldsymbol{A})=3$，所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，所以 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中有 3 个向量，又因为 $A_{12}\neq 0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，所以解为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，故选 C.

6. D

解析：由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 1 的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 -1 的特征向量，故 $-\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 -1 的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 1 的特征向量，故选 D.

7. D

$$P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)$$
$$=p(A\overline{B})-p(A\overline{B}C)+p(\overline{A}B)-p(\overline{A}BC)+p(\overline{B}C)-p(A\overline{B}C)$$
$$=p(A)-p(AB)-[p(AC)-p(ABC)]+p(B)-p(AB)-$$
$$[p(BC)-p(ABC)]+p(C)-p(BC)-[p(AC)-p(ABC)]$$
$$=\frac{1}{4}-0-\left(\frac{1}{12}-0\right)+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}+0+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}$$
$$=\frac{5}{12}$$

8. B

$$E\left(\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}E(X-Y)=\frac{\sqrt{5}}{5}(0-0)=0$$

$$D\left(\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)\right)=\frac{1}{5}D(X-Y)=\frac{1}{5}[DX+DY-2\operatorname{cov}(X,Y)]=\frac{1}{5}(1+2+2)=1$$

9. $(\pi-1)dx-dy$

解析： $dz=\dfrac{(y+\cos(x+y))dx+(x+\cos(x+y))dy}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}\Rightarrow dz\big|_{(0,\pi)}=(\pi-1)dx-dy$

10. $y=x-1$

解析：$x+y+e^{2xy}=0$ 两边对 x 求导得 $1+y'+e^{2xy}\cdot 2(y+xy')=0$ 带入 $(0,-1)$ 得 $y'=1$ 则切线方程为 $y=x-1$。

11.8

解析 $L(Q)=PQ-C(Q)$

$$=700-\frac{1600}{Q+2}-16Q$$

$L'(Q)=0\Rightarrow Q=8$ 或 -12（舍）

12. $\pi\ln 2-\dfrac{\pi}{3}$

解析 $\int_0^1 2\pi x\dfrac{1}{1+x^2}dx-\int_0^1 2\pi x\cdot\dfrac{x}{2}dx=\pi\ln 2-\dfrac{\pi}{3}$

13. a^4-4a^2

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a & a \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= a \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1+a^2 \\ 0 & a & a \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= -4a^2 + a^4 .$$

14. $\dfrac{8}{7}$

$$P\{Y=0\} = P\{X=3\} + P\{X=6\} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k}$$

$$P\{Y=1\} = P\{X=1\} + P\{X=4\} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k-2}$$

$$P\{Y=2\} = P\{X=2\} + P\{X=5\} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k-1}$$

$$EY = 1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k-2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k-1} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7}$$

15.

$$\lim_{n} \frac{(1+\frac{1}{n})^n - e}{\frac{b}{n^a}} = \frac{1}{b} \lim_{n} n^a \ e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} - e = \frac{1}{b} \lim_{n} n^a e \ e^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1} - 1$$

$$= \frac{e}{b} \lim_{n} n^{a+1} (\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}) = \frac{e}{b} \lim_{n} n^{a+1} (-\frac{1}{2n^2})$$

$$= -\frac{a}{2b} \lim_{n} \frac{n^{a+1}}{n^2} = 1$$

得 $a=1$，$b=-\dfrac{1}{2}$

16. $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - xy$

$\begin{cases} f_x' = 3x^2 - y \\ f_y' = 24y^2 - x \end{cases}$ 令上式为 0，解得 $(0,0)$，$(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12})$.

$f''_{xx} = 6x$， $f''_{yy} = 48y$， $f''_{xy} = 1$

得到 $AC - B^2 = 6x \cdot 48y - 1\Big|_{(0,0)} = -1 < 0$

$AC - B^2 = 6x \cdot 48y - 1\Big|_{(\frac{1}{6},\frac{1}{12})} = 3 > 0$，$A = \frac{1}{6} > 0$，所以极小值为 $f\left|\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right| = -\frac{1}{216}$

17.解：（1）微分方程的特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$，解得 $\lambda = -1 \pm 2i$，从而齐次方程的通解 $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$，再由 $f(0) = C_1 = 1$， $f'(0) = -C_1 + 2C_2 = -1$，得 $C_1 = 1, C_2 = 0$，从而 $f(x) = e^{-x}\cos 2x$.

（2）

$$a_n = \int_{n\pi}^{+\infty} e^{-x}\cos 2x dx = -e^{-x}\cos 2x\Big|_{n\pi}^{+\infty} - \int_{n\pi}^{+\infty} e^{-x} 2\sin 2x dx$$

$$= e^{-n\pi} + e^{-x} 2\sin 2x\Big|_{n\pi}^{+\infty} - \int_{n\pi}^{+\infty} e^{-x} 4\cos 2x dx ,$$

$$= e^{-n\pi} - 4a_n$$

从而 $a_n = \frac{1}{5}e^{-n\pi}$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-\pi}\right)^n = \frac{e^{-\pi}}{5\left(1-e^{-\pi}\right)} = \frac{1}{5\left(e^{\pi}-1\right)}$

18.解：令 $A = \iint_D f(x,y)dxdy$，则对函数两边求二重积分可得

$$A = \iint_D y\sqrt{1-x^2}dxdy + A\iint_D xdxdy,$$

而由积分区域关于 y 轴对称，而 x 为 x 的奇函数，得 $\iint_D xdxdy = 0$，则

$A = \iint_D y\sqrt{1-x^2}dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\sqrt{1-x^2}dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\left(1-x^2\right)dx$，利用换元法可得

$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{3}{16}\pi$.对原式两端同乘以 x，得

$$xf(x,y) = xy\sqrt{1-x^2} + x^2\iint_D f(x,y)dxdy = xy\sqrt{1-x^2} + x^2 A,$$

从而两边积分得 $\iint_D xf(x,y)dxdy = \iint_D xy\sqrt{1-x^2}dxdy + A\iint_D x^2 dxdy$，而由积分区域关于 y

轴对称，而 $xy\sqrt{1-x^2}$ 为 x 的奇函数，得 $\iint\limits_D xy\sqrt{1-x^2}dxdy=0$，而

$$\iint\limits_D x^2dxdy=\int_0^{\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^1 r^2\cdot rdr=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8},$$

从而所求 $\iint\limits_D xf(x,y)dxdy=\dfrac{3}{128}\pi^2$.

19.（1）因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导连续，所以 $f(x)$ 连续，故 $|f(x)|$ 在 $[0,2]$ 上可取到最大值 M，不妨设该点为 x_0，即 $x_0\in[0,2]$，且 $|f(x_0)|=M$.

若 $M=0$，则结论显然成立.

若 $M>0$，由于 $f(0)=f(2)=0$，故 $x_0\in(0,2)$，此时 $|f(x_0)|=M$

$M=|f(x_0)-f(0)|=|f'(\xi_1)|x_0$，$\xi_1\in(0,x_0)$ （1）

$M=|f(2)-f(x_0)|=|f'(\xi_2)|(2-x_0)$，$\xi_2\in(x_0,2)$ （2）

若 $x_0\in(0,1]$，由（1）式得 $|f'(\xi_1)|=\dfrac{M}{x_0}\geq M$

若 $x_0\in(1,2)$，由（2）式得 $|f'(\xi_2)|=\dfrac{M}{2-x_0}>M$

综上所述，无论 x_0 在 $(0,2)$ 中何处，均有 $\xi\in(0,2)$ 使 $f'(\xi)\geq M$

(2) 若对任意的 $x\in(0,2)$ 有 $|f'(x)|\leq M$，则必有 $M\geq 0$，

假设 $M>0$，则由题及第一问可知

存在 $|f'(\xi_1)|=\dfrac{M}{x_0}\leq M$，$|f'(\xi_2)|=\dfrac{M}{2-x_0}\leq M$，所以 $x_0=1$，因此 $|f(1)|=M$

而 $M=|f(1)|=\left|\int_0^1 f'(x)dx\right|\leq\int_0^1|f'(x)|dx\leq\int_0^1 Mdx=M,$

故 $M=\left|\int_0^1 f'(x)dx\right|\leq\int_0^1|f'(x)|dx\leq M$.

因此 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上不变号，而 $\int_0^1(|f'(x)|-M)dx=0$，又因为 $|f'(x)|\leq M$，所以 $|f'(x)|\equiv M$

同理在 $(1,2)$ $|f'(x)|\equiv M$，又 $|f(1)|=M$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 与 $(1,2)$ 上异号，

若 $x\in(0,1)$，$f'(x)\equiv M$，$x\in(1,2)$ $f'(x)\equiv -M$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导，与题目具有连续导数矛盾，故 $M=0$.

20.（1）可知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a & 2\\ 2 & b\end{pmatrix}$.故有 $a+b=5$，$ab-4=0$，联立解得

$a=4$，$b=1$.

（2）$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-5)$

当特征值为 0 时，其对应的特征向量为 $\alpha_1=(2,1)^{T}$.

当特征值为 5 时，其对应的特征向量为 $\alpha_2=(1,-2)^{T}$.

故 $P_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$，$P_1^{T}AP_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 2\\ 2 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-5)$

当特征值为 0 时，其对应的特征向量为 $\alpha_3=(1,-2)^{T}$.

当特征值为 5 时，其对应的特征向量为 $\alpha_1=(2,1)^{T}$.

故 $P_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$，$P_2^{T}BP_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

所以 $P_1^{T}AP_1=P_2^{T}BP_2$，$P_2P_1^{T}AP_1P_2^{T}=B$

所以 $Q=P_1P_2^{T}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}$.

21.（1）由于 $P=(\alpha, A\alpha)$，$\alpha\neq 0$，且 $\lambda\alpha\neq A\alpha$

则 α 与 $A\alpha$ 不成比例，且 $\alpha\neq 0$，故 P 可逆.

（2）$AP=A(\alpha, A\alpha)=(A\alpha, A^2\alpha)=(A\alpha,-A\alpha+6\alpha)$

即 $AP=P\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

故 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{matrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{matrix}$

所以 $\boldsymbol{A}\sim\begin{matrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{matrix}=\boldsymbol{B}$

$$\left|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}-\lambda & 6\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-2)$$

故 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-3$，故 $\boldsymbol{B}$ 可以有两个不同的特征值，可以相似对角化，因此 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

22.

(1)

$$P\{Z_1=1,Z_2=1\}=P\{X>Y,X>-Y\}=P\{X>Y\}=\frac{1}{4}$$

$$P\{Z_1=1,Z_2=0\}=P\{X>Y,X\le -Y\}=P\{\phi\}=0$$

$$P\{Z_1=0,Z_2=1\}=P\{X\le Y,X>-Y\}=P\{-Y<X\le Y\}=\frac{1}{2}$$

$$P\{Z_1=0,Z_2=0\}=P\{X\le Y,X\le -Y\}=P\{X\le -Y\}=\frac{1}{4}$$

(2) $EZ_1=\frac{1}{4}$ $EZ_2=\frac{3}{4}$ $EZ_1^2=\frac{1}{4}$ $EZ_2^2=\frac{3}{4}$

$$DZ_1=DZ_2=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{16}$$

$$\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)=E(Z_1,Z_2)-EZ_1\cdot EZ_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{16}$$

23. $f(t)=\begin{cases}\dfrac{mt^{m-1}}{\theta^m}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$P\{T>s+t\,|\,T>s\}=\frac{P\{T>s+t,T>s\}}{p\{T>s\}}=\frac{P\{T>s+t\}}{p\{T>s\}}=\frac{1-p\{T\le s+t\}}{1-p\{T\le s\}}$$

$$=\frac{1-F(s+t)}{1-F(s)}=\frac{\mathrm{e}^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}}{\mathrm{e}^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}}=\mathrm{e}^{\left(\frac{s}{\theta}\right)^m-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}$$

似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(t_i)=\begin{cases}\dfrac{m^n}{\theta^{mn}}\left(\prod_{i=1}^{n}t_i\right)^{m-1}e^{-\frac{1}{\theta^m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m} & ,t_1,t_2,\ldots t_n\ge 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $t_1,t_2,\ldots t_n \geq 0$ 时

$$\ln L(\theta)=n\ln m-mn\ln\theta+(m-1)\sum_{i=1}^{n}\ln t_i-\frac{1}{\theta^m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{mn}{\theta}+\frac{m}{\theta^{m+1}}\sum_{i=1}^{n}t_i^m=0$$

$$\hat{\theta}=\sqrt[m]{\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i^m}{n}}$$