2020 年全国硕士研究生招生考试（数学一）参考答案及解析

1. D

解析：A 选项可知 $(\int_0^x (e^{t^2}-1)dt)'=e^{x^2}-1\sim x^2$；

B 选项 $(\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt)'=\ln(1+\sqrt{x^3})\sim x^{\frac{3}{2}}$；

C 选项 $(\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt)'=\sin x^2\cos x\sim x^2$；

D 选项 $(\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}dt)'=\sin x\sqrt{\sin^3(1-\cos x)}\sim\sqrt{\frac{1}{2}}x^4$.

2. C

解析：当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时,有 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，且

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在设为 a ,则有，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{|x|}}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{|x|}}=a\cdot0=0.$$

3. A

函数 $f(x,y)$ 在点（0,0）处可微，,则有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}x-\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}x-\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

即有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

4. A

5. B

解析：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换化成 $\boldsymbol{B}$，根据左行右列，应该选 B .

6. C

解析：由于两直线相交，故两直线的方向向量无关，即 α_1，α_2 无关，由因为两直线上有两点组成的向量与两直线的方向向量共面，故 $\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_2-a_3\\ b_1 & b_2 & b_2-b_3\\ c_1 & c_2 & c_2-c_3\end{vmatrix}=0$，故选 C .

7. D

$$P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$$
$$=p(A\bar{B})-p(A\bar{B}C)+p(\bar{A}B)-p(\bar{A}BC)+p(\bar{B}C)-p(A\bar{B}C)$$
$$=p(A)-p(AB)-[p(AC)-p(ABC)]+p(B)-p(AB)-$$
$$[p(BC)-p(ABC)]+p(C)-p(BC)-[p(AC)-p(ABC)]$$
$$=\frac{1}{4}-0-\left(\frac{1}{12}-0\right)+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}+0+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}$$
$$=\frac{5}{12}$$

8. B

$$E\sum_{i=1}^{100}X_i=\sum_{i=1}^{100}EX_i=100\times\frac{1}{2}=50$$

$$D\sum_{i=1}^{100}X_i=\sum_{i=1}^{100}DX_i=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$$

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-50}{5}\leqslant\frac{55-50}{5}\right\}=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100}x_i-50}{5}\leqslant 1\right\}=\Phi(1)$$

9. -1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(e^x-1)}{x^2}=\frac{x-\frac{1}{2}x^2-(x+\frac{1}{2}x^2)}{x^2}=-1$$

10. $-\sqrt{2}$

解析：$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{t}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}\Rightarrow\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$

11. $am+n$

解析：$\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}[-af'(x)-f''(x)]dx=am+n$.

12. $4e$

$$f(x,y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{xt^2}\mathrm{d}t;$$
$$f_y(x,y)=\mathrm{e}^{xx^2y^2}x, f_y(x,1)=\mathrm{e}^{x^3}x;$$
$$f_{yx}(x,1)=\mathrm{e}^{x^3}3x^2x+\mathrm{e}^{x^3};$$

解析：$f_{yx}(1,1)=4\mathrm{e}.$

13. $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a & a \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix}$

$= a \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1+a^2 \\ 0 & a & a \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix}$

$= -4a^2 + a^4.$

14. $\dfrac{2}{\pi}$

$\mathrm{Cov}(X, \sin X) = EX\sin X - EXE\sin X$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$EX\sin X = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = -\frac{2}{\pi}\left(x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \right) = \frac{2}{\pi}$$

$EX = E\sin X = 0$

$\mathrm{Cov}(X, \sin X) = EX\sin X - EXE\sin X = \dfrac{2}{\pi}$

15.解：对函数关于 x, y 分别求导，令并两偏导数同时为零，得 $\begin{cases} f_x' = 3x^2 - y = 0 \\ f_x' = 24y^2 - x = 0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{6} \\ y = \dfrac{1}{12} \end{cases}$.又 $f_{xx}'' = 6x, f_{xy}'' = -1, f_{yy}'' = 48y$，在 $(0,0)$ 处，$AC - B^2 = -1 < 0$，从而函数在此处不取极值；在 $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right)$ 处，$AC - B^2 = 3 > 0, A = 1 > 0$，从而函数在此处取极小值，且 $f\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right) = -\dfrac{1}{216}$.综上函数的极值为 $f\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right) = -\dfrac{1}{216}$.

16. 解：由条件知 $P = \dfrac{4x - y}{4x^2 + y^2}, Q = \dfrac{x + y}{4x^2 + y^2}$，可得 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{-4x^2 - 8xy + y^2}{\left(4x^2 + y^2\right)^2} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.令 $l: 4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$，其中 ε 为充分小的正数，取顺时针方向．则

$$I=\int_{L+l}-\int_{l}=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{l}(4x-y)dx+(x+y)dy=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D'}2dxdy=\pi$$

17.（1）已知 $a_{n+1}=\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n+1}a_n$，故 $a_{n+1}<a_n<\cdots<a_1=1$，又有 $a_n\left|x^n\right|<a_1\left|x^n\right|=\left|x^n\right|$，而

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|x^n\right|$ 当 $|x|<1$ 收敛，有比较判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_nx^n\right|$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛.

（2）设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，则 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}na_nx^{n-1}=\sum\limits_{n=0}(n+1)a_{n+1}x^n$

则 $S'(x)-xS'(x)=\sum\limits_{n=0}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum\limits_{n=1}na_nx^n=a_1+\dfrac{1}{2}S(x)$.

故 $S'(x)-\dfrac{1}{2(1-x)}S(x)=\dfrac{1}{1-x}$

所以 $S(x)=\dfrac{C}{\sqrt{1-x}}-2$

由于 $S(0)=0$，所以 $C=2$.

故 $S(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}-2$

18. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的法向量是 $\boldsymbol{n}=\left\{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right\}$，

则有 $\dfrac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}=\dfrac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}=\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{-1}$，即 $\begin{cases}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{cases}$

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+(2x-y)]\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+[yf(xy)+2y+x]\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+[zf(xy)+2]\,dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}-2\sqrt{x^2+y^2}+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint_{\Sigma}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

设 Σ 在 xoy 面的投影为 D_{xy}，则 $D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

则上式 $=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^2\mathrm{d}r+(-2)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\mathrm{d}r$

$=\dfrac{10}{3}\pi$.

19.（1）因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导连续，所以 $f(x)$ 连续，故 $|f(x)|$ 在 $[0,2]$ 上可取到最大值 M，不妨设该点为 x_0，即 $x_0\in[0,2]$，且 $|f(x_0)|=M$.

若 $M=0$，则结论显然成立.

若 $M>0$，由于 $f(0)=f(2)=0$，故 $x_0\in(0,2)$，此时 $|f(x_0)|=M$

$M=|f(x_0)-f(0)|=|f^{'}(\xi_1)|x_0$，$\xi_1\in(0,x_0)$　　（1）

$M=|f(2)-f(x_0)|=|f^{'}(\xi_2)|(2-x_0)$，$\xi_2\in(x_0,2)$　　（2）

若 $x_0\in(0,1]$，由（1）式得 $|f^{'}(\xi_1)|=\dfrac{M}{x_0}\geq M$

若 $x_0\in(1,2)$，由（2）式得 $|f^{'}(\xi_2)|=\dfrac{M}{2-x_0}>M$

综上所述，无论 x_0 在 $(0,2)$ 中何处，均有 $\xi\in(0,2)$ 使 $f^{'}(\xi)\geq M$

(2) 若对任意的 $x\in(0,2)$ 有 $|f'(x)|\leq M$，则必有 $M\geq 0$，

假设 $M>0$，则由题及第一问可知

存在 $|f^{'}(\xi_1)|=\dfrac{M}{x_0}\leq M$，$|f^{'}(\xi_2)|=\dfrac{M}{2-x_0}\leq M$，所以 $x_0=1$，因此 $|f(1)|=M$

而 $M=|f(1)|=\left|\int_0^1 f'(x)dx\right|\leq\int_0^1|f'(x)|dx\leq\int_0^1 Mdx=M,$

故 $M=\left|\int_0^1 f'(x)dx\right|\leq\int_0^1|f'(x)|dx\leq M$.

因此 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上不变号，而 $\int_0^1(|f'(x)|-M)dx=0$，又因为 $|f'(x)|\leq M$，所以 $|f'(x)|\equiv M$

同理在 $(1,2)$ $|f'(x)|\equiv M$，又 $|f(1)|=M$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 与 $(1,2)$ 上异号，

若 $x\in(0,1)$，$f'(x)\equiv M$，$x\in(1,2)$ $f'(x)\equiv -M$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导，与题目具有连续导数矛盾，故 $M=0$.

20.（1）可知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{matrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{matrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{matrix}a & 2\\ 2 & b\end{matrix}$.故有 $a+b=5$，$ab-4=0$，联立解得 $a=4$，$b=1$.

（2）$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-5)$

当特征值为0时，其对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1)^{\mathrm{T}}$.

当特征值为5时，其对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2)^{\mathrm{T}}$.

故 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

$|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 2\\ 2 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-5)$

当特征值为0时，其对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2)^{\mathrm{T}}$.

当特征值为5时，其对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1)^{\mathrm{T}}$.

故 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

所以 $\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$，$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$

所以 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}$.

21.（1）由于 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$，$\boldsymbol{\alpha}\neq 0$，且 $\lambda\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 不成比例，且 $\boldsymbol{\alpha}\neq 0$，故 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

（2）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+6\boldsymbol{\alpha})$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

故 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A} \sim \begin{matrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{matrix} = \boldsymbol{B}$

$$|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} -\lambda & 6 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-2)$$

故 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-3$，故 $\boldsymbol{B}$ 可以有两个不同的特征值，可以相似对角化，因此 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

22.

（1）$F(x,y)=p\left\{X_1\leqslant x, Y\leqslant y\right\}=p\left\{X_1\leqslant x, X_3X_1+\left(1-X_3\right)X_2\leq y\right\}$

$=p\left\{X_1\leqslant x, X_3X_1+\left(1-X_3\right)X_2\leqslant y \mid X_3=0\right\}p\left\{X_3=0\right\}$
$+p\left\{X_1\leqslant x, X_3X_1+\left(1-X_3\right)X_2\leqslant y \mid X_3=1\right\}p\left\{X_3=1\right\}$

$=\frac{1}{2}p\left\{X_1\leqslant x, X_2\leqslant y\right\}+\frac{1}{2}\left\{X_1\leqslant x, X_1\leq y\right\}$

当 $x<y$ 时，$F(x,y)=\frac{1}{2}p\left\{X_1\leq x, X_2\leq y\right\}+\frac{1}{2}p\{X\leq x\}=\frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(x)$

当 $x\geq y$ 时，$F(x,y)=\frac{1}{2}p\left\{X_1\leq x, X_2\leq y\right\}+\frac{1}{2}p\{X\leq y\}=\frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(y)$

综上所述：

$$F(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(x) & x<y \\ \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(y) & x\geq y \end{cases}$$

（2）

$F(y)=p\{Y\leq y\}=\frac{1}{2}p\left\{X_2\leq y\right\}+\frac{1}{2}p\{X_1\leq y)=\frac{1}{2}\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(y)=\Phi(y)$

即 Y 服从标准正态分布

23.

$$f(t)=\begin{cases} \frac{mt^{m-1}}{\theta^m}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geqslant 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$P\left\{T>s+t \mid T>s\right\}=\frac{P\{T>s+t, T>s\}}{p\{T>s\}}=\frac{P\{T>s+t\}}{p\{T>s\}}=\frac{1-p\{T\leq s+t\}}{1-p\{T\leq s\}}$$

$$=\frac{1-F(s+t)}{1-F(s)}=\frac{\mathrm{e}^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}}{\mathrm{e}^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}}=\mathrm{e}^{\left(\frac{s}{\theta}\right)^m-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}$$

似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(t_i)=\begin{cases}\frac{m^n}{\theta^{mn}}\left(\prod_{i=1}^{n}t_i\right)^{m-1}e^{-\frac{1}{\theta^m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m} & ,t_1,t_2,\ldots t_n\geq 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $t_1,t_2,\ldots t_n\geq 0$ 时

$$\ln L(\theta)=n\ln m-mn\ln\theta+(m-1)\sum_{i=1}^{n}\ln t_i-\frac{1}{\theta^m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{mn}{\theta}+\frac{m}{\theta^{m+1}}\sum_{i=1}^{n}t_i^m=0$$

$$\hat{\theta}=\sqrt[m]{\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i^m}{n}}$$