

2020 年全国硕士研究生入学考试

数学一试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上。

1. $x \rightarrow 0^+$ 时，下列无穷小量中最高阶是 ()

A $\int_0^x (e^t - 1) dt$ B $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt$ C $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$ D $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内有定义，且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ，则 ()

A 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$ ， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

B 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ ， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

C 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$ 。

D 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ 。

3. 设函数 $f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微， $f(0, 0) = 0$ ， $n = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) \Big|_{(0,0)}$ 非零向量 d 与 n 垂直，则 ()

A $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|n \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ 存在 B $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|n \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ 存在

C $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|d \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ 存在 D $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|d \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

4. 设 R 为幂函数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径， r 是实数，则 ()

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 发散时， $|r| \geq R$ B $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 发散时， $|r| \leq R$

C $|r| \geq R$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 发散 D $|r| \leq R$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 发散

5. 若矩阵 A 经初等变换化成 B, 则 ()

A 存在矩阵 P, 使得 $PA = B$

B 存在矩阵 P, 使得 $BP = A$

C 存在矩阵 P, 使得 $PB = A$

D 方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解

6. 已知直线 $L_1: \frac{x-a_2}{a_1} = \frac{y-b_2}{b_1} = \frac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $L_2: \frac{x-a_3}{a_2} = \frac{y-b_3}{b_2} = \frac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点,

法向量 $\alpha_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}, i=1,2,3$ 则

A. a_1 可由 a_2, a_3 线性表示

B. a_2 可由 a_1, a_3 线性表示

C. a_3 可由 a_1, a_2 线性表示

D. a_1, a_2, a_3 线性无关

7. 设 A, B, C 为三个随机事件, 且

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{5}{12}$

8. 设 $x_1, x_2, \dots, x_{(n)}$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 其中 $P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{2}$, $\Phi(x)$

表示标准正态分布函数, 则利用中心极限定理可得 $P(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55)$ 的近似值为

A. $1-\Phi(1)$

B. $\Phi(1)$

C. $1-\Phi(0,2)$

D. $\Phi(0,2)$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

9、 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] =$

10、设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$ ，则 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=1} =$

11、若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0$ ($a > 0$)，且 $f(0) = m$ ， $f'(0) = n$ ，则

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx =$$

12、设函数 $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{xt^2} dt$ ，则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} =$

13、行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$

14、设 x 服从区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布， $Y = \sin X$ ，则 $\text{Cov}(X, Y) =$

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的最大值

(16) (本题满分 10 分)

计算曲线积分 $I = \int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y} dy$ ，其中 L 是 $x^2 + y = 2$ ，方向为逆时针方向

(17) (本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $(x+1)\alpha_n + 1 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha_n$ ，证明：当 $|x| < 1$ 时幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$ 收敛，

并求其和函数。

(18) (本题满分 10 分)

设 Σ 为由面 $Z: \sqrt{x^2 + y^2} (|x^2 + y^2| \leq 4)$ 的下侧， $f(x)$ 是连续函数，计算

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y]dydz + [yf(xy) + 2y + x]dzdx + [2f(xy) + 2]dxdy$$

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(\xi)$ 在区间 $[0, 2]$ 上具有连续导数 $f(0) = f(2) = 0$, $M = \max_{x \in (0, 2)} \{|f(x)|\}$

证明: (1) $\exists \xi \in (0, 2)$ 使得 $|f'(\xi)| \geq M$

(2) 若对任意的 $x \in (0, 2)$, $|f'(x)| \leq M$ 则 $M = 0$

(20) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经正交变化 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型

$g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$, 其中 $a \geq b$

(1) 求 a, b 的值

(2) 求正交变换矩阵 Q

(21) (本题满分 11 分)

设 A 为 2 阶矩阵, $P = (a, Aa)$, 其中 a 是非零向量且不是 A 的特征向量。

(1) 证明 P 为可逆矩阵;

(2) 若 $A^2a + Aa - 6a = 0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵。

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布, X_3 的概率分布为

$$P\{X_3 = 0\} = P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}, \quad Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2.$$

(1) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数。结果用标准正态分布 $\Phi(x)$ 表示;

(2) 证明随机变量 Y 服从标准正态分布。

(23) (本题满分 11 分)

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零。

(1) 求概率 $P\{T > t\}$ 与 $P\{T > S + t | T > S\}$, 其中 $S > 0, t > 0$ 。

(2) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得它们的寿命分别为 t_1, t_2, \dots, t_n , 若 m 已知, 求 θ 的

最大似然估计值 $\hat{\theta}$ 。

爱启航考研