

# 2019 全国研究生招生考试数学一试题

## (真题)



启航教育

# 2019 年考研数学一真题

一、选择题, 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.

1. 当  $x \rightarrow 0$  时, 若  $x - \tan x$  与  $x^k$  是同阶无穷小, 则  $k =$

- A.1.
- B.2.
- C.3.
- D.4.

2. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leq 0, \\ x \ln x, & x > 0, \end{cases}$  则  $x = 0$  是  $f(x)$  的

- A.可导点, 极值点.                      B.不可导点, 极值点.  
C.可导点, 非极值点.                  D.不可导点, 非极值点.

3. 设  $\{u_n\}$  是单调增加的有界数列, 则下列级数中收敛的是

- A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ .
- B.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{u_n}$ .
- C.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$ .
- D.  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$ .

4. 设函数  $Q(x, y) = \frac{x}{y^2}$ ，如果对上半平面 ( $y > 0$ ) 内的任意有向光滑封闭曲线  $C$  都有

$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ , 那么函数  $P(x,y)$  可取为

- A.  $y - \frac{x^2}{y^3}$ .      B.  $\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^3}$ .
- C.  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ .      D.  $x - \frac{1}{y}$ .

5. 设  $A$  是 3 阶实对称矩阵,  $E$  是 3 阶单位矩阵. 若  $A^2 + A = 2E$ , 且  $|A| = 4$ , 则二次型  $x^T A x$  的规范形为

- A.  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ .                      B.  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ .
- C.  $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ .                      D.  $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ .

6. 如图所示, 有 3 张平面两两相交, 交线相互平行, 它们的方程

$$a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = d_i (i = 1, 2, 3)$$



组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为  $A, \bar{A}$ , 则

A.  $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$ .

B.  $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 2$ .

C.  $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$ .

D.  $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 1$ .

7. 设  $A, B$  为随机事件, 则  $P(A) = P(B)$  的充分必要条件是

A.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

B.  $P(AB) = P(A)P(B)$ .

C.  $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$ .

D.  $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$ .

8. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且都服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P\{|X - Y| < 1\}$

A. 与  $\mu$  无关, 而与  $\sigma^2$  有关.

B. 与  $\mu$  有关, 而与  $\sigma^2$  无关.

C. 与  $\mu, \sigma^2$  都有关.

D. 与  $\mu, \sigma^2$  都无关.

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数  $f(u)$  可导,  $z = f(\sin y - \sin x) + xy$ , 则  $\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} =$ \_\_\_\_\_.

10. 微分方程  $2yy' - y^2 - 2 = 0$  满足条件  $y(0) = 1$  的特解  $y =$ \_\_\_\_\_.

11. 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$  在  $(0, +\infty)$  内的和函数  $S(x) =$ \_\_\_\_\_.

12. 设  $\Sigma$  为曲面  $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4 (z \geq 0)$  的上侧, 则  $\iint_{\Sigma} \sqrt{4-x^2-4z^2} dx dy =$ \_\_\_\_\_.

13. 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  为 3 阶矩阵. 若  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关, 且  $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$ , 则线性方程组  $Ax = 0$  的通解为\_\_\_\_\_.

14. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$   $F(x)$  为  $X$  的分布函数,  $EX$  为

$X$  的数学期望, 则  $P\{F(X) > EX - 1\} =$ \_\_\_\_\_.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 10 分)

设函数  $y(x)$  是微分方程  $y' + xy = e^{\frac{x^2}{2}}$  满足条件  $y(0) = 0$  的特解.

(1) 求  $y(x)$ ;

(2) 求曲线  $y = y(x)$  的凹凸区间及拐点.

16. (本题满分 10 分)

设  $a, b$  为实数, 函数  $z = 2 + ax^2 + by^2$  在点  $(3, 4)$  处的方向导数中, 沿方向  $l = -3i - 4j$  的方向导数最大, 最大值为 10.

(1) 求  $a, b$ ;

(2) 求曲面  $z = 2 + ax^2 + by^2$  ( $z \geq 0$ ) 的面积.

17. 求曲线  $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$  与  $x$  轴之间图形的面积.

18. 设  $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$ ,  $n = (0, 1, 2, \dots)$

(1) 证明数列  $\{a_n\}$  单调减少, 且  $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$  ( $n=2, 3, \dots$ )

(2) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ .

19. 设  $\Omega$  是锥面  $x^2 + (y-2)^2 = (1-z)^2 (0 \leq z \leq 1)$  与平面  $z=0$  围成的锥体, 求  $\Omega$  的形心坐标.

20. 设向量组  $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (1, 3, 2)^T, \alpha_3 = (1, a, 3)^T$ , 为  $R^3$  的一个基,  $\beta = (1, 1, 1)^T$  在这个基下的坐标为  $(b, c, 1)^T$ .

(1) 求  $a, b, c$ .

(2) 证明  $a_2, a_3, \beta$  为  $R^3$  的一个基, 并求  $a_2, a_3, \beta$  到  $a_1, a_2, a_3$  的过渡矩阵.

21. 已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$  与  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$  相似

(1) 求  $x, y$ .

(2) 求可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$ .

22. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X$  服从参数为 1 的指数分布,  $Y$  的概率分布为  $P\{Y = -1\} = p, P\{Y = 1\} = 1 - p, (0 < p < 1)$ , 令  $Z = XY$

(1) 求  $z$  的概率密度.

(2)  $p$  为何值时,  $X$  与  $Z$  不相关.

(3)  $X$  与  $Z$  是否相互独立?

23. (本题满分 11 分)

设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & x \geq \mu, \\ 0 & x < \mu, \end{cases}$$

其中  $\mu$  是已知参数,  $\sigma > 0$  是未知参数,  $A$  是常数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  来自总体  $X$  的简单随机样本.

(1) 求  $A$ ;

(2) 求  $\sigma^2$  的最大似然估计量

**想要获取更多考研资讯**

请关注“启航考研”官方微信公众号



启航考研