

2005 年全国硕士研究生入学统一考试

经济数学三试题详解及评析

一、 填空题

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} =$ _____.

【答】 2

【详解】 令 $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$, 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} xy \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin y}{y} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin y}{y} = 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

(2) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 2$ 的特解为 _____.

【答】 $y = \frac{2}{x}$

【详解】 微分方程 $xy' + y = 0$ 的充分必要条件为 $(xy)' = 0$, 积分得 $xy = C$, 故微分方程 $xy' + y = 0$ 的解是 $y = \frac{C}{x}$, 利用初始 $y(1) = 2$ 可确定常数 $C = 2$, 故所求特解为 $y = \frac{2}{x}$.

(3) 设二元函数 $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$, 则 $dz \Big|_{(1,0)} =$ _____.

【答】 $2edx + (e+2)dy$.

【详解】 利用全微分方程的四则运算法则与一阶微分形式不变性直接计算, 得

$$dz = e^{x+y} dx + xd(e^{x+y}) + \ln(1+y)d(x+1) + (x+1)d(\ln(1+y))$$

$$= e^{x+y} dx + xe^{x+y} d(x+y) + \ln(1+y)dx + (x+1)\frac{dy}{1+y}$$

$$= e^{x+y} dx + xe^{x+y} d(x+y) + \ln(1+y)dx + \frac{(x+1)dy}{1+y},$$

于是 $dz \Big|_{(1,0)} = edx + e(dx+dy) = 2edx + (e+2)dy$.

(4) 设行向量组 $(2,1,1,1)$, $(2,1,a,a)$, $(3,2,1,a)$, $(4,3,2,1)$ 线性相关, 且 $a \neq 1$, 则 $a =$

【答】 $\frac{1}{2}$

【详解】 由题设，有

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 3 & 2 & 1 & a \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 \end{vmatrix} = (a-1)(2a-1) = 0, \text{ 由于题}$$

设规定 $a \neq 1$ ，故 $a = \frac{1}{2}$.

(5) 从数 1,2,3,4 中任取一个数，记为 X，再从 1,2,...,X 中任取一个数，记为 Y，则

$P\{Y = 2\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答】 $\frac{13}{48}$

【详解 1】 由于事件

$$\{X = 1\}, \{X = 2\}, \{X = 3\}, \{X = 4\}$$

是一个完备事件组，且 $P\{X = i\} = \frac{1}{4}, i = 1, 2, 3, 4$. 条件概率 $P\{Y = 2 | X = 1\} = 0$,

$$P\{Y = 2 | X = i\} = \frac{1}{i}, i = 2, 3, 4$$

$$P\{Y = 2\} = \sum_{i=1}^4 P\{X = i\}P\{Y = 2 | X = i\}$$

$$= \frac{1}{4} \left(0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{13}{48}.$$

【详解 2】 根据乘法公式 $P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i\}P\{Y = j | X = i\}, i, j = 1, 2, 3, 4$,

容易写出 (X, Y) 的联合密度概率分布为

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$P\{Y=2\} = \sum_{i=1}^4 p_{i2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} = \frac{13}{48}.$$

(6) 设二维随机变量(X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立, 则 $a=$ ____, $b=$ ____.

【答】 0.4, 0.1

【详解】 从 $\sum_i \sum_j p_{ij} = 0.4 + a + b + 0.1 = 1$, 或知 $a + b = 0.5$.

从事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立, 于是有

依题意

$$P\{X=0, X+Y=1\} = P\{X=0\}P\{X+Y=1\},$$

$$P\{X=0, X+Y=1\} = P\{X=0\}P\{X=1\} = a,$$

$$P\{X+Y=1\} = P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=0\} = A + B = 0.5,$$

$$P\{X=0\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} = 0.4 + a,$$

$$\text{解方程组} \begin{cases} 0.5(a+0.4) = a, \\ a+b=0.5, \end{cases}$$

得 $a=0.4, b=0.1$

二、选择题

(7) 当 a 取下列哪个值时, 函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - a$ 恰好有两个不同的零点.

(A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8.

【 】

【答】 [B]

【详解】 令函数 $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$,

$g'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2) = 0$, 可得 $g(x)$ 恰有两个驻点 $x=1$ 与 $x=2$, 利

用, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, 即知 $g(1) = 5, g(2) = 4$ 分别是函数 $g(x)$ 的惟一极大

值与惟一极小值, 且函数 $g(x)$ 的单调性如下表:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	从 $-\infty$ \uparrow	极大值 5	\downarrow	极小值 4	\uparrow 到 $+\infty$

由此可见曲线 $y = g(x)$ 与 $y = 4$ 恰有两个不同的交点即当 $a=4$ 时,

函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - a$ 恰好有两个零点, 故应选(B).

(8) 设 $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$, $I_2 = \iint_D \cos(x^2 + y^2) d\sigma$, $I_3 = \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 d\sigma$, 其中

$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则

(A) $I_3 > I_2 > I_1$.

(B) $I_1 > I_2 > I_3$.

(C) $I_2 > I_1 > I_3$.

(D) $I_3 > I_1 > I_2$.

【 】

【答】 [A]

【详解】 在积分区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上, 有

$$(x^2 + y^2)^2 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{x^2 + y^2},$$

且等号仅在区域 D 的边界 $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ 上成立, 从而积分区域 D 上有

$$\cos(x^2 + y^2)^2 \leq \cos(x^2 + y^2) \leq \cos \sqrt{x^2 + y^2},$$

且等号也仅仅在区域 D 的边界 $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ 上成立。此外, 三个被积函数又都在

区域 D 上连续, 按二重积分的性质, 即得 $I_3 > I_2 > I_1$, 故应选(A).

(9) 设 $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则下列结论正确的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛.

【 】

【答】 [D]

【详解】 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} - a_{2n-1})$ 是把收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 各项不改变顺序且相邻两

项合并为一项构成的新级数, 由收敛级数的性质知该级数必收敛, 故应选 (D)。

(10) 设 $f(x) = x \sin x + \cos x$, 下列命题中正确的是

- (A) $f(0)$ 是极大值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极小值. (B) $f(0)$ 是极小值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值.
(C) $f(0)$ 是极大值, $f(\frac{\pi}{2})$ 也是极大值. (D) $f(0)$ 是极小值, $f(\frac{\pi}{2})$ 也是极小值

【 】

【答】 [B]

【详解】 注意函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上可导, 且

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x > 0,$$

在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上成立, 故函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调增加, 从而 $f(0) < f(x) < f(\frac{\pi}{2})$,

即 $f(0)$ 是最 (极) 小值, 显然 $f'(0) = 0, f'(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值, 应选 (B)。

(11) 以下四个命题中, 正确的是

- (A) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.
(B) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.
(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.
(D) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

【 】

【答】 [C]

【详解 1】 举例否定错误的命题.

设函数 $f(x) = \ln x$, 它的导函数 $f'(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 但 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内无界, 着表明命题 (A) 不正确. 同样, 设函数 $f(x) = \ln x$, 在 $(0, 1)$ 内连续, 但 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内无界, 这表明 (B) 不正确. 设函数 $f(x) = \sqrt{x}$, 它在 $(0, 1)$ 内有界, 但它的导函数

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

在 $(0, 1)$ 内无界, 这表明 (D) 不正确. 由此可见, 应选 (C)。

【详解 2】 用拉个朗日中值定理直接证明命题 (C) 正确.

因 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 可知存在整数 M , 使得当 $x \in (0,1)$ 时 $|f'(x)| \leq M$ 成立, 由题设,

对任何 $x \in (0,1)$ 有位于 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间的 ξ , 使

$$\begin{aligned} f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) &= f'(\xi) \left(x - \frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow f(x) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + f'(\xi) \left(x - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

故

$$|f(x)| \leq \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| + |f'(\xi)| \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \frac{1}{2}M, x \in (0,1).$$

这表明 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(12) 设矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足 $A^* = A^T$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵, A^T 为 A 的转置矩阵. 若

a_{11}, a_{12}, a_{13} 为三个相等的正数, 则 a_{11} 为

$$(A) \quad \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (B) \quad 3. \quad (C) \quad \frac{1}{3}. \quad (D) \quad \sqrt{3}.$$

【 】

【答】 [A]

【详解】 因为 $A^* = A^T$ 即

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

由此可知 $a_{ij} = A_{ij}, \forall i, j = 1, 2, 3$. 那么

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 3a_{11}^2 > 0$$

又由 $A^* = A^T$, 两边取行列式并利用 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 及 $|A^T| = |A|$

得 $|A|^2 = |A|$, 从而 $|A| = 1$.

因为 $3a_{11}^2 = 1$, 故 $a_{11} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故应选为(A).

(13) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 α_1 ,

$A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1 = 0$. (B) $\lambda_2 = 0$. (C) $\lambda_1 \neq 0$. (D) $\lambda_2 \neq 0$.

【 】

【答】 [D]

【详解】按特征向量的定义，有 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$.

$\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关 $\Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0, k_1, k_2$ 恒为 0,

$\Leftrightarrow (k_1 + \lambda_1k_2)\alpha_1 + \lambda_2k_2\alpha_2 = 0, k_1, k_2$ 恒为 0,

由于不同特征值的特征向量线性无关，所以 α_1, α_2 线性无关.

于是

$$\begin{cases} k_1 + k_2\lambda_1 = 0, \\ k_2\lambda_2 = 0. \end{cases} k_1, k_2 \text{ 恒为 } 0$$

而齐次方程 $\begin{cases} k_1 + k_2\lambda_1 = 0, \\ k_2\lambda_2 = 0. \end{cases}$ 只有零解 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 \neq 0$.

所以应选 (B).

(14) 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ, σ^2 均未知. 现从中随机抽取 16 个零件，测得样本均值 $\bar{x} = 20(cm)$ ，样本标准差 $s = 1(cm)$ ，则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间是

(A) $(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}(16), 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}(16))$. (B) $(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}(16), 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}(16))$.

(C) $(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}(15), 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}(15))$. (D) $(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}(15), 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}(15))$.

【 】

【答】 [C]

【详解】根据一个正态总体方差未知，关于 μ 的置信区间公式 $I = (\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}}\lambda, \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}}\lambda)$,

其中 λ 满足：

$$P\{|T| > \lambda\} = \alpha, T \sim t(n-1),$$

对于 t 分布的双侧邻界值表 $P\{|T| > \lambda_\alpha(n)\} = \alpha$ ，应选 (D)，对于 t 分布的上侧分位数表

$$P\{T > \lambda_\alpha(n)\} = \alpha, \text{ 应选 (C) }$$

三、解答题

(15) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x})$.

【详解】 利用洛必达法则可得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$,

于是又有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{x} = 1$.

从而

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+x)-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(1-e^{-x})} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-e^{-x}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1+e^{-x}}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-e^{-x}} \\&= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1+e^{-x}}{x^2} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-e^{-x}}{2x} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

(16) 设 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 且 $g(x, y) = f(\frac{y}{x}) + yf(\frac{x}{y})$, 求 $x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

【详解】 利用多元复合函数求偏导数的链锁法则直接计算, 得

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f'(\frac{y}{x}) \left(\frac{y}{x}\right)'_x + yf'(\frac{x}{y}) \left(\frac{x}{y}\right)'_x = -\frac{y}{x^2} f'(\frac{y}{x}) + f'(\frac{x}{y}),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\left(\frac{y}{x^2}\right)'_x f'(\frac{y}{x}) + \left(-\frac{y}{x^2}\right)^2 f''(\frac{y}{x}) + \frac{1}{y} f''(\frac{y}{x}),$$

$$= \frac{2y}{x^3} f'(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^4} f''(\frac{x}{y}) + \frac{1}{y} f''(\frac{x}{y})$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = f'(\frac{y}{x}) \left(\frac{y}{x}\right)'_y + f\left(\frac{x}{y}\right) + yf'(\frac{x}{y}) \left(\frac{x}{y}\right)'_y,$$

$$= \frac{1}{x} f'(\frac{y}{x}) + f\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y} f'(\frac{x}{y})$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} f''(\frac{y}{x}) - \frac{x}{y^2} f'(\frac{y}{x}) + \frac{x}{y^2} f'(\frac{x}{y}) + \frac{x^2}{y^3} f''(\frac{x}{y}),$$

$$= \frac{1}{x^2} f''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x^2}{y^3} f''\left(\frac{x}{y}\right)$$

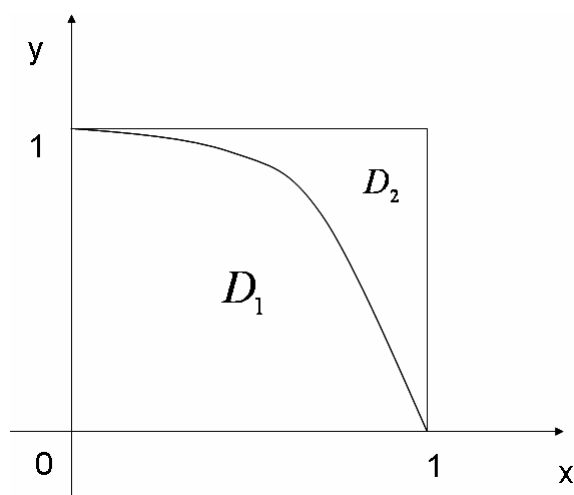
由此可得

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \\ = \frac{2y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^2} f''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y} f''\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y^2}{x^2} f''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x^2}{y} f''\left(\frac{x}{y}\right) \\ = \frac{2y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

(17)(本题满分9分)

计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

【详解】 将积分区域分块, 如图,



设

$$D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\} \cap D ,$$

$$D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 1\} \cap D ,$$

则 $D = D_1 + D_2$, 且可以分块计算二重积分

$$\begin{aligned} \iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma &= \iint_{D_1} |x^2 + y^2 - 1| d\sigma + \iint_{D_2} |x^2 + y^2 - 1| d\sigma \\ &= \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) d\sigma, \end{aligned}$$

用极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 计算第一个二重积分, 由于

$$D_1 = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1 \right\},$$

故

$$\iint_{D_1} (1-x^2-y^2) d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (1-r^2) r dr = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8}.$$

用直角坐标系计算第二个二重积分. 由于

$$D_2 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1 \right\},$$

故

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) d\sigma &= \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x^2 + y^2 - 1) dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1 - (1-x^2)^{\frac{2}{3}}}{3} + (x^2 - 1) \left(1 - \sqrt{1-x^2} \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{3} + \int_0^1 (x^2 - 1) dx + \frac{2}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

最后可得

$$\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

(18) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - 1 \right) x^{2n}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x)$.

【详解】 不难发现 $S(0) = 0$. 从而只需求出当 $0 < |x| < 1$ 时和函数 $S(x)$ 的表达式, 注意

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - 1 \right) x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}, \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{x} S_1(x) - \frac{x^2}{1-x^2}, \end{aligned}$$

其中

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$$

逐项求导, 得

$$S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2}, x \in (-1, 1).$$

将上式两端的 x 分别改写为 t , 并分别从 0 到 $x \in (-1, 1)$ 求定积分 , 可得

$$S_1(x) - S_1(0) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt = -x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, x \in (-1, 1).$$

又因为 $S_1(0) = 0$, 于是

$$S_1(x) = -x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, x \in (-1, 1).$$

综合以上讨论 , 即得

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}, & 0 < |x| < 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(19) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的导数连续 , 且 $f(0)=0, f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0$. 证明 : 对任何

$a \in [0, 1]$, 有

$$\int_0^a g(x) f'(x) dx + \int_0^1 f(x) g'(x) dx \geq f(a) g(1).$$

【详解 1】 利用函数的单调性来证明本题. 为此引入函数

$$F(a) = \int_0^a g(t) f'(t) dt + \int_0^1 f(t) g'(t) dt - f(a) g(1), a \in [0, 1],$$

由题设知 , 函数 $f(x), g(x)$ 都是区间 $[0, 1]$ 上的单调非减函数 , 且 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上非负 , 从而

$$F'(a) = g(a) f'(a) - f'(a) g(1) = f'(a) [g(a) - g(1)] \leq 0, a \in [0, 1],$$

又

由于 $x \in [0, 1]$ 时 , $f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0$, 因此 $F'(x) \leq 0$, 即 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减.

注意到

$$\begin{aligned} F(1) &= \int_0^1 g(x) f'(x) dx + \int_0^1 f(x) g'(x) dx - f(1) g(1) \\ &= \int_0^1 d[f(x) g(x)] - f(1) g(1) \\ &= [g(x) f(x)] \Big|_0^1 - f(1) g(1) = -f(0) g(0) = 0. \end{aligned}$$

故函数 $F(a)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调非增 , 且 $F(a) \geq F(1) = 0$ 当 $a \in [0, 1]$ 时成立.

【详解 2】 利用直接计算定积分来证明本题. 为此计算差

$$\begin{aligned}
& \int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 g'(x)f(x)dx - f(a)g(1) \\
&= \int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^a g'(x)f(x)dx - f(a)g(1) + \int_a^1 g'(x)f(x)dx \\
&= \int_0^a d[g(x)f'(x)] - f(a)g(1) + \int_a^1 g'(x)f(x)dx \\
&= f(a)g(a) - f(0)g(0) - f(a)g(1) + \int_a^1 g'(x)f(x)dx \\
&= -f(a)[g(a) - g(0)] + \int_a^1 g'(x)f(x)dx \\
&= \int_a^1 g'(x)f(x)dx - \int_a^1 g'(x)f(a)dx \\
&= \int_0^1 g'(x)[f(x) - f(a)]dx, a \in [0,1].
\end{aligned}$$

注意到函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调非减, 而 $g'(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上非负, 不难发现上面最后所得定积分的被积函数非负, 从而对任何 $a \in [0,1]$ 这个定积分的积分值非负, 即原不等式成立.

(20) 已知齐次线性方程组

$$(i) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0, \end{cases}$$

和

$$(ii) \begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0, \end{cases}$$

同解, 求 a, b, c 的值.

【详解】 因为方程组 (ii) 的未知量个数大于方程个数, 故方程组方程组 (ii) 有无穷多解, 因此方程组 (i) 的系数行列式必为 0, 即有

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2 - a = 0, \Rightarrow a = 2.$$

对方程组 (i) 的系数矩阵施以初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

可求出方程组 (i) 的通解是 $k(-1, -1, 1)^T$. 因为 $(-1, -1, 1)^T$ 应当是方程组 (ii) 的界, 故有

$$\begin{cases} -1-b+c=0, \\ -2-b^2+c+1=0. \end{cases}$$

解出 $b=1, c=2$ 或 $b=0, c=1$.

当 $b=1, c=2$ 时, 对方程组 (ii) 的系数矩阵施以初等行变换, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

显然此时方程组 (i) 与 (ii) 同解.

当 $b=0, c=1$ 时, 对方程组 (ii) 为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}'$$

因其系数矩阵的秩为 1, 从而方程组 (i) 与 (ii) 的解不相同. 故 $b=0, c=1$ 应当舍去.

所以, 当 $a=2, b=1, c=2$ 时, 方程组 (i) 与 (ii) 同解.

(21) 设 $D = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$ 为正定矩阵, 其中 A, B 分别为 m 阶, n 阶对称矩阵, C 为 $m \times n$

矩阵.

(I) 计算 $P^T D P$, 其中 $P = \begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ o & E_n \end{bmatrix}$;

(II) 利用(I)的结果判断矩阵 $B - C^T A^{-1}C$ 是否为正定矩阵, 并证明你的结论.

【详解】 (I) 因 $P^T = \begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ o & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & o \\ -C^T A^{-1} & E_n \end{bmatrix}$, 所以

$$\begin{aligned} P^T D P &= \begin{bmatrix} E_m & o \\ -C^T A^{-1} & E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ o & E_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & C \\ o & B - C^T A^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ o & E_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & o \\ o & B - C^T A^{-1}C \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(II) 因为 D 是对称矩阵, 知 $P^T D P$ 是对称矩阵, 所以矩阵 $B - C^T A^{-1}C$ 是对称矩阵. 又

因为矩阵 D 与 $\begin{bmatrix} A & o \\ o & B - C^T A^{-1}C \end{bmatrix}$ 合同, 且 D 正定, 知矩阵 $\begin{bmatrix} A & o \\ o & B - C^T A^{-1}C \end{bmatrix}$ 正定, 那

么 $\forall \begin{pmatrix} O \\ Y \end{pmatrix} \neq 0$ 恒有

$$(O^T, Y^T) \begin{pmatrix} A & O \\ O & B - C^T A^{-1} C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O \\ Y \end{pmatrix} = Y^T (B - C^T A^{-1} C) Y > 0.$$

所以 $B - C^T A^{-1} C$ 为正定矩阵.

(22) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

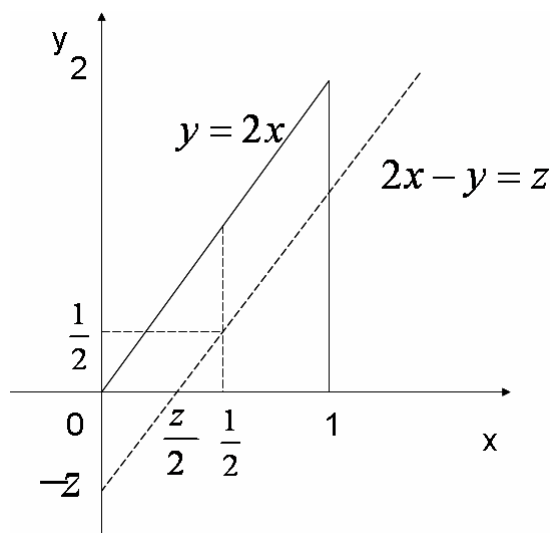
$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求: (I) (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(II) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

$$(III) P\{Y \leq \frac{1}{2} | X \leq \frac{1}{2}\}.$$

【详解 1】 (I) 如图



$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{2x} dy, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{\frac{y}{2}}^1 dx, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(II) 记 $F_Z(z)$ 为 Z 的分布函数, 区域

$$D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 2x\},$$

$$\text{区域 } D_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, y > 0, 2x - y > z > 0\}.$$

由题设可知 (X, Y) 服从区域 D 上均匀分布, D_1 是 D 的一个子区域, 根据二维均匀分布

$$\text{性质, 有 } P\{(X, Y) \in D_1\} = \frac{S_{D_1}}{S_D}.$$

由图可见, 区域 D_1 与 D 都是直角三角形, 其面积

$$S_D = 1, S_{D_1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{2}\right) (2 - z) = \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2.$$

当 $z \leq 0$ 时, $F_Z(z) = P\{2X - Y \leq z\} = 0$;

当 $0 \leq z < 2$ 时,

$$F_Z(z) = P\{2X - Y \leq z\} = 1 - P\{2X - Y > z\} = 1 - P\{(X, Y) \in D_1\}$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2 = z - \frac{z^2}{4};$$

当 $z \geq 2$ 时, $F_Z(z) = P\{2X - Y \leq z\} = 1.$

因此 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}z, & 0 < z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(III) 如图: 记区域 $D_2 = \left\{(x, y) : \frac{y}{2} < y \leq \frac{1}{2}, 0 < y \leq \frac{1}{2}\right\}$, 显然区域 D_2 是一个直角三角

形, 其面积 $S_{D_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$. 于是

$$P\left\{X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2}\right\} = \frac{S_{D_2}}{S_D} = \frac{3}{16}.$$

$$\text{记区域 } D_3 = \left\{(x, y) : 0 < x \leq \frac{1}{2}, 0 < y < 2x\right\},$$

$$\text{则有 } P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} = P\{(X, Y) \in D_3\} = \frac{1}{4},$$

故

$$P\left\{Y \leq \frac{1}{2} \mid X \leq \frac{1}{2}\right\} = \frac{P\left\{Y \leq \frac{1}{2}, X \leq \frac{1}{2}\right\}}{P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\}} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}.$$

【详解2】 () 同【详解1】

() Z 的分布函数记做 $F_Z(z)$, 当 $z \leq 0$ 时, $F_Z(z) = 0$; 当 $z \geq 2$ 时,

$$F_Z(z) = P\{2X - Y \leq z\} = 1.$$

当 $0 \leq z < 2$ 时,

$$\begin{aligned} 1 - F_Z(z) &= P\{Z > z\} = \iint_{2x-y > z} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{\frac{z}{2}}^1 dx \int_0^{2x-z} dy = 1 - z + \frac{z^2}{4}; \end{aligned}$$

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = 1 - P\{Z > z\} = z - \frac{z^2}{4},$$

$$\text{故 } F_Z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{2}, & 0 < z < 2 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$() P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} f_X(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx = \frac{1}{4},$$

$$P\left\{X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2}\right\} = \iint_{x \leq \frac{1}{2}, y \leq \frac{1}{2}} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}} dx = \frac{3}{16},$$

故

$$P\left\{X \leq \frac{1}{2} \mid Y \leq \frac{1}{2}\right\} = \frac{P\left\{X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2}\right\}}{P\left\{Y \leq \frac{1}{2}\right\}} = \frac{3}{4}.$$

(23) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值,

记 $Y_i = X_i - \bar{X}, i = 1, 2, \dots, n$.

求:(1) Y_i 的方差 $DY_i, i = 1, 2, \dots, n$;

(II) Y_1 与 Y_n 的协方差 $Cov(Y_1, Y_n)$.

(III) 若 $c(Y_1 + Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量, 求常数 c .

【详解】由题设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 是简单随机样本, 因此 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 相互独立, 且与总体同分布, 即

$$X_i \sim N(0, \sigma^2), EX_i = 0, DX_i = \sigma^2 (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(I) Y_i = X_i - \bar{X} = -\frac{1}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n X_j + \left(1 - \frac{1}{n}\right) X_i,$$

$$\begin{aligned} DY_i &= D(X_i - \bar{X}) = D\left[-\frac{1}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n X_j + \left(1 - \frac{1}{n}\right) X_i\right] \\ &= \left(-\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n DX_j + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 DX_i \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n DX + \frac{(n-1)^2}{n^2} DX = \frac{n-1}{n} \sigma^2. \end{aligned}$$

(II) $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 相互独立, 所以

$$Cov(X_i, X_j) = \begin{cases} DX_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} Cov(Y_1, Y_n) &= Cov(X_1 - \bar{X}, X_n - \bar{X}) \\ &= Cov(X_1, X_n) - Cov(X_1, \bar{X}) - Cov(X_n, \bar{X}) + Cov(\bar{X}, \bar{X}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(X_1, \bar{X}) &= Cov\left(X_1, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Cov(X_1, X_i) = \frac{1}{n} DX_1 = \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

$$\text{类似地, } Cov(X_n, \bar{X}) = \frac{1}{n} DX_n = \frac{\sigma^2}{n}.$$

$$\text{又因为 } D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

$$\text{故 } Cov(Y_1, Y_n) = 0 - \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} = -\frac{\sigma^2}{n}.$$

(III) 首先计算 $E(Y_1, Y_2)^2$. 由于 $E(Y_1 + Y_2) = EY_1 + EY_2 = 0$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } E[(Y_1 + Y_n)^2] &= D(Y_1 + Y_n) = DY_1 + 2Cov(Y_1, Y_n) + DY_n \\ &= \frac{n-1}{n}\sigma^2 + \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \frac{2}{n}\sigma^2 = \frac{2(n-2)}{n}\sigma^2 = \sigma^2. \end{aligned}$$

若 $c(Y_1 + Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量 , c 应满足下面等式

$$\sigma^2 = E[c(Y_1 + Y_n)^2] = cE[(Y_1 + Y_n)^2] = \frac{2c(n-2)}{n}\sigma^2,$$

故
$$c = \frac{n}{2(n-2)}.$$