

2002 年全国硕士研究生入学统一考试

经济数学三试题详解及评析

一、 填空题

(1) 设常数 $a \neq \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答】 $\frac{1}{1-2a}$

【详解】 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right]^{n(1-2a) \cdot \frac{1}{1-2a}} = e^{\frac{1}{1-2a}}$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \ln e^{\frac{1}{1-2a}} = \frac{1}{1-2a}$

(2) 交换积分次序: $\int_0^{\frac{1}{4}} dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_y^{\frac{1}{2}} f(x, y) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答】 $\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy$

【详解】 积分区域 $D = D_1 + D_2$, 其中

$$D_1 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{4}, y \leq x \leq \sqrt{y} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{2}, y \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}$$

于是 D 也可以表示为 $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, x^2 \leq y \leq x \right\}$.

故

$$\int_0^{\frac{1}{4}} dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_y^{\frac{1}{2}} f(x, y) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy.$$

(3) 设三阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 三维向量 $\alpha = (a, 1, 1)^T$. 已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关,

a = _____

【答】 -1

【详解】 由题设, 存在 k, 使得 $A\alpha = k\alpha$, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{即} \begin{cases} a+2-2=ka, \\ 2a+1+2=k, \text{ 可得 } a=-1, k=1. \\ 3a+4=k, \end{cases}$$

故所求 a 为 - 1.

(4) 设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

P \ X \ Y	Y		
	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

则 X^2 和 Y^2 的斜方差 $\text{cov}(X^2, Y^2) = \underline{\hspace{2cm}}$

【答】 - 0.02

【详解】 由题设，有

X	0	1
P	0.4	0.6

X	-1	0	1
P	0.15	0.5	0.35

且

X^2	0	1
-------	---	---

P	0.4	0.6
---	-----	-----

Y^2	0	1
P	0.5	0.5

X^2Y^2	0	1
P	0.72	0.28

从而 $E(X^2Y^2) = 0.28, E(X^2) = 0.69, E(Y^2) = 0.5,$

故 $\cos(X^2, Y^2) - E(X^2, Y^2)E(X^2)E(Y^2) = 0.28 - 0.3 = -0.02.$

(5) 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & \text{若 } x \geq \theta, \\ 0, & \text{若 } x < \theta \end{cases}$, 而 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X

的简单随机样本, 则未知参数 θ 的矩估计量为_____

【答】 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - 1$

【详解】 因为 $E(X) = \int_0^{+\infty} xe^{-(x-\theta)} dx = \theta + 1,$

所以, 由 $E(X) = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 即 $\theta + 1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$

得参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - 1.$

二、选择题

(1) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义, 在开区间 (a, b) 上可导, 则

(A) 当 $f(a)f(b) < 0$ 时, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0.$

(B) 对任何 $\xi \in (a, b)$, 有 $\lim_{x \rightarrow \xi} [f(x) - f(\xi)] = 0.$

(C) 对 $f(a) = f(b)$ 时, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$

(D) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

【答】 [B]

【详解】 由题设, $f(x)$ 在 $\xi (\xi \in (a, b))$ 处可导, 从而连续,

故有 $\lim_{x \rightarrow \xi} [f(x) - f(\xi)] = 0$. 应选(B).

(2) 设幂级数 $\sum_{n=1}^n a_n x^n$ 和 $\sum_{n=1}^n b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^n \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 的收

敛半径为

(A) 5. (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{5}$

【答】 [A]

【详解】 由题设, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{3}{\sqrt{5}}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = 3,$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left[\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right]^2}{\left[\frac{a_n}{b_n} \right]^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|^2}{\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right|^2} = \frac{9}{9} = \frac{1}{5},$$

故幂级数 $\sum_{n=1}^n \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 的收敛半径为, 故应选[A].

(3) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$, 则线性方程组 $(AB)x = 0$

(A) 当 $n > m$ 时仅有零解. (B) 当时 $n > m$ 必有非零解.

(C) 当时 $m > n$ 仅有零解 (D) 当时 $m > n$ 必有非零解

【答】 [D]

【详解】 AB 为 $m \times m$ 矩阵, 当 $m > n$ 时, 有 $r(AB) \leq r(A) \leq n < m$ 对应 $(AB)x = 0$

有非零解, 故应选[D]

(4) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, P 是 n 阶可逆矩阵. 已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量, 则矩阵 $(P^{-1}AP)^T$ 属于特征值 λ 的特征向量是

(A) $P^{-1}\alpha$ (B) $P^T\alpha$ (C) $P\alpha$ (D) $(P^{-1})^T\alpha$

【答】 [B]

【详解】 由已知 $A\alpha = \lambda\alpha$, 于是 $P^T A \alpha = \lambda P^T \alpha, P^T A (P^{-1})^T \alpha = \lambda P^T \alpha,$

又由于 $A^T = A$, 有 $(P^{-1}AP)^T P^T \alpha = \lambda P^T \alpha$, 可见矩阵 $(P^{-1}AP)^T$ 属于特征值 λ 的特征向量是 $P^T \alpha$.

(5) 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布, 则

(A) $X+Y$ 都服从正态分布 (B) $X^2 + Y^2$ 都服从 χ^2 分布.

(C) X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布. (D) $\frac{X^2}{Y^2}$ 服从 F 分布.

【答】 [C]

【详解】 由于 X 、 Y 不一定相互独立, 故 (A) (B) (D) 不一定成立, 只有 (C) 为正确选项.

三、(本题满分 8 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt] du}{x(1-\cos x)}$$

【详解 1】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt] du}{x(1-\cos x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctan(1+t) dt}{1-\cos x + x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \arctan(1+x^2)}{\sin x + \sin x + x \cos x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \arctan(1+x^2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{2 \sin x}{x} + \cos x} \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

【详解 1】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt] du}{x(1-\cos x)} &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt] du}{x^3} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \arctan(1+t) dt}{3x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan(1+x^2)}{6x} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

四、(本题满分 8 分)

设函数 $u = f(x, y, z)$ 有连续偏导数, 且 $z = z(x, y)$ 由方程 $xe^x - ye^y = ze^z$ 所确定,

求 du

【详解 1】 设 $F(x, y, z) = xe^x - ye^y - ze^z$, 则

$$F'_x = (x+1)e^x, F'_y = -(y+1)e^y, F'_z = -(z+1)e^z.$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{x+1}{z+1}e^{x-z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{y+1}{z+1}e^{y-z},$$

而

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_x + f'_z \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x + f'_z \frac{x+1}{z+1}e^{x-z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_y + f'_z \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y + f'_z \frac{y+1}{z+1}e^{y-z},$$

所以

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = (f'_x + f'_z \frac{x+1}{z+1}e^{x-z})dx + (f'_y + f'_z \frac{y+1}{z+1}e^{y-z})dy.$$

【详解2】在 $xe^x - ye^y = ze^z$ 两边微分,得

$$e^x dx + xe^x dx - e^y dy - ye^y dy = e^z dz + ze^z dz,$$

$$\text{故 } dz = \frac{(1+x)e^x dx - (1+y)e^y dy}{(1+z)e^z}.$$

由 $u = f(x, y, z)$, 得

$$du = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz,$$

故

$$du = (f'_x + f'_z \frac{x+1}{z+1}e^{x-z})dx + (f'_y + f'_z \frac{y+1}{z+1}e^{y-z})dy.$$

五、(本题满分8分)

设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 求 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx$

【详解】令 $u = \sin^2 x$, , 则有

$$\sin x = \sqrt{u}, x = \arcsin \sqrt{u}, f(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \text{. 于是}$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx = \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} d(1-x) = -2 \int \arcsin \sqrt{x} d\sqrt{1-x} \\
&= -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2 \int \sqrt{1-x} \frac{1}{\sqrt{1-x}} d\sqrt{x} \\
&= -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.
\end{aligned}$$

六、设 D_1 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和 $x = a, x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面区域； D_2 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $y = 0, x = a$ 所围成的平面区域，其中 $0 < a < 2$ 。

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1 ； D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2 ；

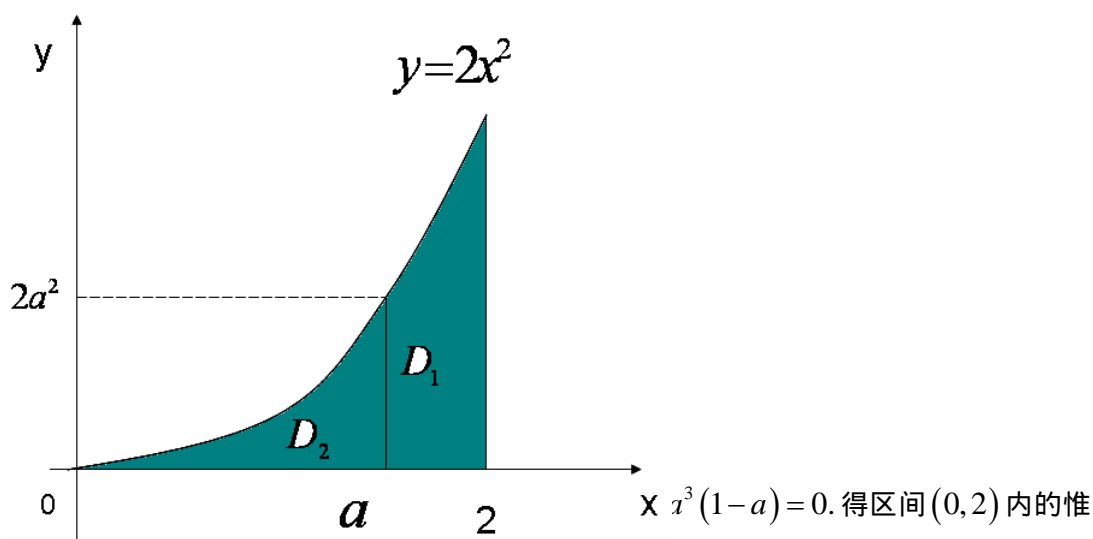
(2) 问当 a 为何值时， $V_1 + V_2$ 取得最大值？试求此最大值。

【详解】

(1)

$$V_1 = \pi \int_a^2 (2x^2)^2 dx = \frac{4\pi}{5} (32 - a^5);$$

$$V_2 = \pi a^2 \cdot 2a^2 - \pi \int_0^{2a^2} \frac{y}{2} dy = 2\pi a^4 - \pi a^4 = \pi a^4.$$



一驻点 $a = 1$ 。

当 $0 < a < 1$ 时， $V' > 0$ ；当 $a > 1$ 时， $V' < 0$ 。因此 $a = 1$ 是极大值点即是最大值点

此时 $V_1 + V_2$ 取得最大值，等于 $\frac{129}{5}\pi$ 。

七、(1) 验证函数 $y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots$ ($-\infty < x < +\infty$) 满足微分方程

$$y'' + y' + y = e^x;$$

(2) 利用(1)的结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

【详解】 (1) 因为

$$y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots,$$

$$y'(x) = \frac{x^3}{2!} + \frac{x^6}{5!} + \frac{x^9}{8!} + \cdots + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \cdots,$$

$$y''(x) = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \cdots$$

所以 $y'' + y' + y = e^x$.

(2) 与 $y'' + y' + y = e^x$ 相应的齐次微分方程为 $y'' + y' + y = 0$, 其特征方程为

$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, 特征根为 $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. 因此齐次微分方程的通解为

$$Y = e^{-\frac{\pi}{2}} \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right].$$

设非齐次方程的特解为 $y^* = Ae^x$ 将 y^* 代入方程 $y'' + y' + y = e^x$, 得 $A = \frac{1}{3}$, 于是

$$y^* = \frac{1}{3}e^x$$

方程的通解为

$$y = Y + y^* = e^{-\frac{\pi}{2}} \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right] + \frac{1}{3}e^x.$$

当 $x = 0$ 时, 有

$$\begin{cases} y(0) = 1 = C_1 + \frac{1}{3} \\ y'(0) = 0 = -\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 + \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{得 } C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = 0.$$

于是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数的和函数为

$$y(x) = \frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{3} e^x, (-\infty < x < +\infty).$$

八、(本题满分8分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) > 0$, 利用闭区间上连续函数性质, 证明存

在一点 $\xi \in [a, b]$, 使 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

【详解】 因为 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) > 0$, 由最值定理, 知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 M 和最小值 m , 即

$$m \leq f(x) \leq M,$$

故 $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$.

$$\int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx,$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

由介值定理知, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},$$

$$\text{即 } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

九、设齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n = 0, \end{cases}$$

其中 $a \neq 0, b \neq 0, n \geq 2$. 试讨论 a, b 为何值时方程组仅有零解、有无穷多组解? 在有无穷多组解时, 求出全部解, 并用基础解系表示全部解.

【详解】 方程组的系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

当 $a \neq b$, 且 $a \neq (1-n)b$ 时, 方程组仅有零解.

(2) 当 $a = b$ 时, 对系数矩阵 A 作初等变换, 有

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

原方程组的通解方程组为

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0,$$

其基础解系为

$$\alpha_1 = (-1, 1, 0, \cdots, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1, \cdots, 1)^T, \cdots, \alpha_{n-1} = (-1, 0, 0, \cdots, 1)^T.$$

方程组的全部解是

$$x = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \cdots + c_{n-1} \alpha_{n-1} \quad (c_1, c_2, \dots, c_{n-1} \text{ 为任意常数})$$

(3) 当 $a = (1-n)b$ 对系数矩阵 A 作初等变换, 有

$$A = \begin{bmatrix} (1-n)b & b & b & \cdots & b \\ b & (1-n)b & b & \cdots & b \\ b & b & (1-n)b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & (1-n)b \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{1} \begin{bmatrix} (1-n) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & (1-n) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (1-n) \end{bmatrix} \xrightarrow{2} \begin{bmatrix} -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{bmatrix} \xrightarrow{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

原方程组的通解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_n, \\ x_2 = x_n, \\ \cdots \cdots \\ x_{n-1} = x_n, \end{cases}$$

其基础解系为 $\beta = (1, 1, \cdots, 1)^T$

方程组的全部特解是

$x = c\beta$ (c 为任意常数) .

十、设 A 为三阶实对称矩阵, 且满足 $A^2 + 2A = O$ 已知 A 的秩为 $r(A) = 2$.

(1) 求 A 的全部特征值;

(2) 当 k 为何值时, 矩阵 $A + kE$ 为正定矩阵, 其中 E 为三阶单位矩阵.

【详解 1】(1) 设 λ 为 A 的一个特征值, 对应的特征系向量为 α , 则 $A\alpha = \lambda\alpha$ ($\alpha \neq 0$)

$$A^2\alpha = \lambda^2\alpha.$$

$$\text{于是 } (A^2 + A)\alpha = (\lambda^2 + 2\lambda)\alpha$$

$$\text{由条件 } A^2 + 2A = O \text{ 推知 } (\lambda^2 + 2\lambda)\alpha = 0$$

$$\text{又由于 } \alpha \neq 0, \text{ 故有 } \lambda^2 + 2\lambda = 0,$$

因为实对称矩阵 A 必可以对角化, 且 $r(A) = 2$. 所以

$$A \sim \begin{bmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} = A$$

因此, 矩阵 A 的全部特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 0.$$

(2) 矩阵 $A + kE$ 仍为实对称矩阵, 由 (1) 知, $A + kE$ 的全部特征值为

$$-2+k, -2+k, k.$$

于是, 当 $k > 2$ 时, 矩阵 $A + kE$ 的全部特征值大于零, 因此, 矩阵 $A + kE$ 为正定矩阵.

【详解2】同详解1.

(2) 实对称矩阵必定可以对角化, 故存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda, A = P\Lambda P^{-1}$$

于是

$$A + kE = P\Lambda P^{-1} + kP^{-1}P = P(\Lambda + kE)P^{-1},$$

所以 $A + kE \sim \Lambda + kE$

$$\text{而} \quad \Lambda + kE = \begin{bmatrix} k-2 & & \\ & k-2 & \\ & & k-2 \end{bmatrix},$$

$\Lambda + kE$ 为正定矩阵, 只需其顺序主子式均大于零, 即 k 需满足

$$k-2 > 0, (k-2)^2 > 0, (k-2)^2 k > 0.$$

因此, 当 $k > 2$ 时, 矩阵 $A + kE$ 为正定矩阵.

十一、设随机变量 U 在区间 $[-2, 2]$ 上服从均匀分布, 随机变量

$$X = \begin{cases} -1, & \text{若 } U \leq -1, \\ 1, & \text{若 } U > -1, \end{cases} \quad Y = \begin{cases} -1, & \text{若 } U \leq 1, \\ 1, & \text{若 } U > 1. \end{cases}$$

试: 求 (1) X 和 Y 的联合密度分布;

$$(2) \quad D(X+Y).$$

【详解】(1) 随机变量 (X, Y) 有四个可能值: $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)$.

$$P\{X = -1, Y = -1\} = P\{U \leq -1, U \leq 1\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{X = -1, Y = 1\} = P\{U \leq -1, U > 1\} = 0,$$

$$P\{X = 1, Y = -1\} = P\{U > -1, U \leq 1\} = \frac{1}{2},$$

$$P\{X = 1, Y = 1\} = P\{U > -1, U > 1\} = \frac{1}{4}$$

于是, 得 X 和 Y 的联合概率分布为

$$(X, Y) \sim \begin{bmatrix} (-1, -1) & (-1, 1) & (1, -1) & (1, 1) \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

(2) $X+Y$ 和 $(X+Y)^2$ 的概率分布相应为

$$X+Y \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, (X+Y)^2 \sim \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

由此可见

$$E(X+Y) = -\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 0;$$

$$D(X+Y) = E(X+Y)^2 = 2.$$

十二、(本题满分 13 分)

假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从指数分布,平均无故障工作的时间 (EX) 为 5 小时.设备定时开机,出现故障时自动关机,而在无故障的情况下工作 2 小时便关机.试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 $F(y)$.

【详解】 设 X 的分布参数为 λ . 由于 $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 5$, 可见 $\lambda = \frac{1}{5}$.

显然 $Y = \min\{X, 2\}$.

对于 $y < 0$, $F(y) = 0$; 对于 $y \geq 2$, $F(y) = 1$.

设 $0 \leq y < 2$, 有

$$F(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\min\{X, 2\} \leq y\} = P\{X \leq y\} = 1 - e^{-\frac{y}{5}}$$

于是, Y 的分布函数为

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-\frac{y}{5}}, & 0 \leq y < 2, \\ 1, & y \geq 2. \end{cases}$$