

2009 年全国硕士研究生入学统一考试  
数学二试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 函数  $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin nx}$  的可去间断点的个数为 ( )

- (A) 1.            (B) 2.            (C) 3.            (D) 无穷多个.

(2) 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = x - \sin ax$  与  $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$  是等价无穷小, 则 ( )

- (A)  $a=1, b=-\frac{1}{6}$ .    (B)  $a=1, b=\frac{1}{6}$ .    (C)  $a=-1, b=-\frac{1}{6}$ .    (D)  $a=-1, b=\frac{1}{6}$

(3) 设函数  $z = f(x, y)$  的全微分为  $dz = xdx + ydy$ , 则点  $(0, 0)$  ( )

- (A) 不是  $f(x, y)$  的连续点.    (B) 不是  $f(x, y)$  的极值点.  
(C) 是  $f(x, y)$  的极大值点.    (D) 是  $f(x, y)$  的极小值点.

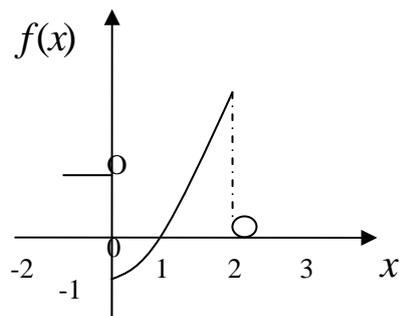
(4) 设函数  $f(x, y)$  连续, 则  $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y) dx =$  ( )

- (A)  $\int_1^2 dx \int_1^{4-x} f(x, y) dy$ .    (B)  $\int_1^2 dx \int_x^{4-x} f(x, y) dy$ .  
(C)  $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx$ .    (D)  $\int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx$

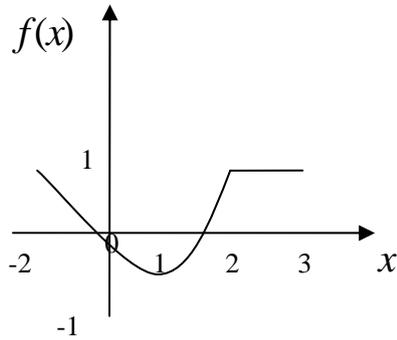
(5) 若  $f''(x)$  不变号, 且曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, 1)$  上的曲率圆为  $x^2 + y^2 = 2$ , 则  $f(x)$  在区间  $(1, 2)$  内 ( )

- (A) 有极值点, 无零点.    (B) 无极值点, 有零点.  
(C) 有极值点, 有零点.    (D) 无极值点, 无零点.

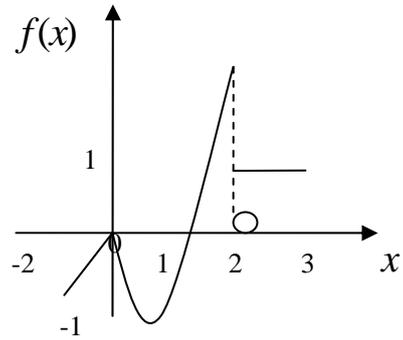
(6) 设函数  $y = f(x)$  在区间  $[-1, 3]$  上的图形为



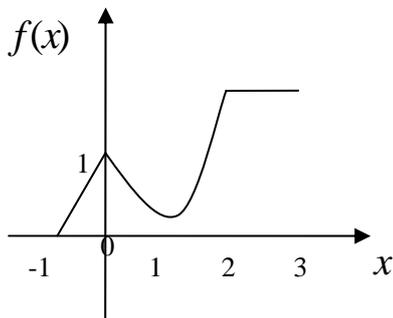
则函数  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  的图形为 ( )



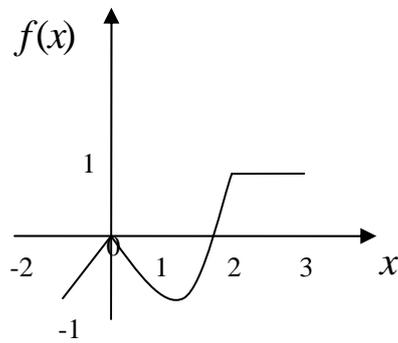
(A).



(B).



(C).



(D).

(7) 设  $A, B$  均为 2 阶矩阵,  $A^*, B^*$  分别为  $A, B$  的伴随矩阵. 若  $|A|=2, |B|=3$ , 则分

块矩阵  $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$  的伴随矩阵为 ( )

(A).  $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$       (B).  $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$

(C).  $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$       (D).  $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

(8) 设  $A, P$  均为 3 阶矩阵,  $P^T$  为  $P$  的转置矩阵, 且  $P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 若

$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ , 则  $Q^T A Q$  为 ( )

(A).  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$       (B).  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$(C) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (D) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线  $\begin{cases} x = \int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y = t^2 \ln(2-t^2) \end{cases}$  在  $(0, 0)$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

(10) 已知  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 1$ , 则  $k =$ \_\_\_\_\_.

(11)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-x} \sin nx dx =$ \_\_\_\_\_.

(12) 设  $y = y(x)$  是由方程  $xy + e^y = x + 1$  确定的隐函数, 则  $\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=0} =$ \_\_\_\_\_.

(13) 函数  $y = x^{2^x}$  在区间  $(0, 1]$  上的最小值为\_\_\_\_\_.

(14) 设  $\alpha, \beta$  为 3 维列向量,  $\beta^T$  为  $\beta$  的转置, 若矩阵  $\alpha\beta^T$  相似于  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则

$$\beta^T \alpha = \underline{\hspace{2cm}}.$$

三、解答题：15-23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 9 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$ .

(16) (本题满分 10 分)

计算不定积分  $\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx \quad (x > 0)$ .

(17) (本题满分 10 分)

设  $z = f(x+y, x-y, xy)$ , 其中  $f$  具有 2 阶连续偏导数, 求  $dz$  与  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

(18) (本题满分 10 分) 设非负函数  $y = y(x) (x \geq 0)$  满足微分方程  $xy'' - y' + 2 = 0$ , 当曲线  $y = y(x)$  过原点时, 其与直线  $x = 1$  及  $y = 0$  围成平面区域  $D$  的面积为 2, 求  $D$  绕  $y$  轴旋转所得旋转体体积.

(19) (本题满分10分) 计算二重积分  $\iint_D (x-y) dx dy$ , 其中

$$D = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}.$$

(20) (本题满分12分)

设  $y = y(x)$  是区间  $(-\pi, \pi)$  内过点  $(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}})$  的光滑曲线, 当  $-\pi < x < 0$  时, 曲线上任一点处的法线都过原点, 当  $0 \leq x < \pi$  时, 函数  $y(x)$  满足  $y'' + y + x = 0$ . 求  $y(x)$  的表达式.

(21) (本题满分11分)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  可导, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ ;

(II) 证明: 若函数  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 在  $(0, \delta)$  ( $\delta > 0$ ) 内可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$ , 则  $f'_+(0)$  存在, 且  $f'_+(0) = A$ .

(22) (本题满分11分) 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

(I) 求满足  $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$  的所有向量  $\xi_2, \xi_3$ ;

(II) 对 (I) 中的任一向量  $\xi_2, \xi_3$ , 证明:  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  线性无关.

(23) (本题满分11分) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

(I) 求二次型  $f$  的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次型  $f$  的规范形为  $y_1^2 + y_2^2$ , 求  $a$  的值.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试  
数学二试题答案

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 函数  $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$  的可去间断点的个数为 ( )

- (A) 1.            (B) 2.            (C) 3.            (D) 无穷多个.

【答案】C

【解析】

$$f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$$

则当  $x$  取任何整数时， $f(x)$  均无意义

故  $f(x)$  的间断点有无穷多个，但可去间断点为极限存在的点，故应是  $x-x^3=0$  的解

$$x_{1,2,3} = 0, \pm 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-x^3}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-3x^2}{\pi \cos \pi x} = \frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-x^3}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-3x^2}{\pi \cos \pi x} = \frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-x^3}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-3x^2}{\pi \cos \pi x} = \frac{2}{\pi}$$

故可去间断点为 3 个，即  $0, \pm 1$

(2) 当  $x \rightarrow 0$  时， $f(x) = x - \sin ax$  与  $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$  是等价无穷小，则 ( )

- (A)  $a=1, b=-\frac{1}{6}$ .    (B)  $a=1, b=\frac{1}{6}$ .    (C)  $a=-1, b=-\frac{1}{6}$ .    (D)  $a=-1, b=\frac{1}{6}$ .

【答案】A

【解析】 $f(x) = x - \sin ax, g(x) = x^2 \ln(1-bx)$  为等价无穷小，则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1-bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \cdot (-bx)} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \sin ax}{-6bx}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \sin ax}{-\frac{6b}{a} \cdot ax} = -\frac{a^3}{6b} = 1 \quad \therefore a^3 = -6b \quad \text{故排除 } B, C.$$

另外  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2}$  存在, 蕴含了  $1 - a \cos ax \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow 0$ ) 故  $a = 1$ . 排除  $D$ .

所以本题选  $A$ .

(3) 设函数  $z = f(x, y)$  的全微分为  $dz = xdx + ydy$ , 则点  $(0, 0)$  ( )

(A) 不是  $f(x, y)$  的连续点. (B) 不是  $f(x, y)$  的极值点.

(C) 是  $f(x, y)$  的极大值点. (D) 是  $f(x, y)$  的极小值点.

【答案】 D

【解析】 因  $dz = xdx + ydy$  可得  $\frac{\partial z}{\partial x} = x, \frac{\partial z}{\partial y} = y$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 1, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1$$

$$\text{又在 } (0, 0) \text{ 处, } \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$AC - B^2 = 1 > 0$$

故  $(0, 0)$  为函数  $z = f(x, y)$  的一个极小值点.

(4) 设函数  $f(x, y)$  连续, 则  $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y) dx =$  ( )

$$(A) \int_1^2 dx \int_1^{4-x} f(x, y) dy. \quad (B) \int_1^2 dx \int_x^{4-x} f(x, y) dy.$$

$$(C) \int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx. \quad (D) \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx$$

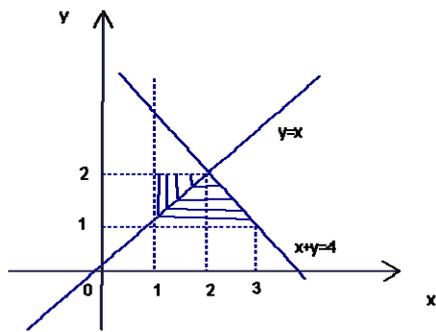
【答案】 C

【解析】  $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_x^2 f(x, y) dx$  的积分区域为两部分:

$$D_1 = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2\}, \quad D_2 = \{(x, y) | 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 4 - y\}$$

将其写成一块  $D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq 2, 1 \leq x \leq 4 - y\}$

故二重积分可以表示为  $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx$ , 故答案为  $C$ .



(5) 若  $f''(x)$  不变号, 且曲线  $y=f(x)$  在点  $(1,1)$  上的曲率圆为  $x^2+y^2=2$ , 则  $f(x)$  在区间  $(1,2)$  内 ( )

(A) 有极值点, 无零点. (B) 无极值点, 有零点.

(C) 有极值点, 有零点. (D) 无极值点, 无零点.

【答案】 B

【解析】 由题意可知,  $f(x)$  是一个凸函数, 即  $f''(x) < 0$ , 且在点  $(1,1)$  处的曲率

$$\rho = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 而 } f'(1) = -1, \text{ 由此可得, } f''(1) = -2$$

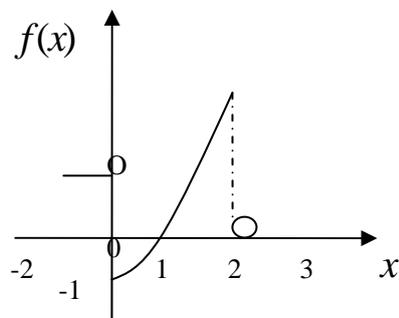
在  $[1,2]$  上,  $f'(x) \leq f'(1) = -1 < 0$ , 即  $f(x)$  单调减少, 没有极值点.

对于  $f(2) - f(1) = f'(\zeta) < -1$ ,  $\zeta \in (1,2)$ , (拉格朗日中值定理)

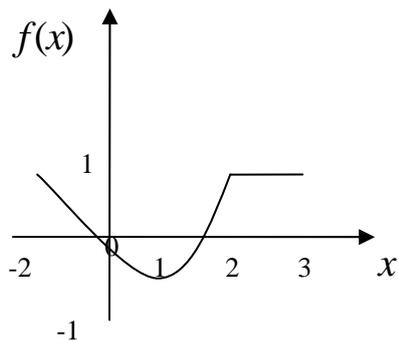
$\therefore f(2) < 0$  而  $f(1) = 1 > 0$

由零点定理知, 在  $[1,2]$  上,  $f(x)$  有零点. 故应选 (B).

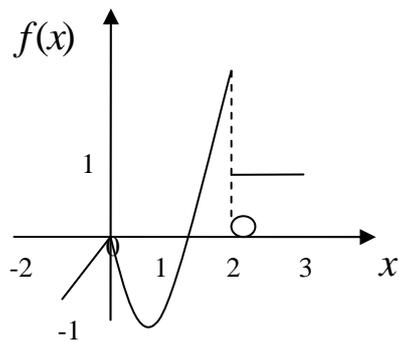
(6) 设函数  $y=f(x)$  在区间  $[-1,3]$  上的图形为



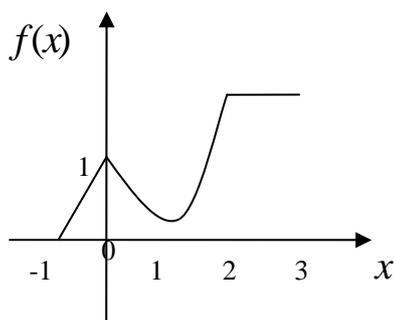
则函数  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  的图形为 ( )



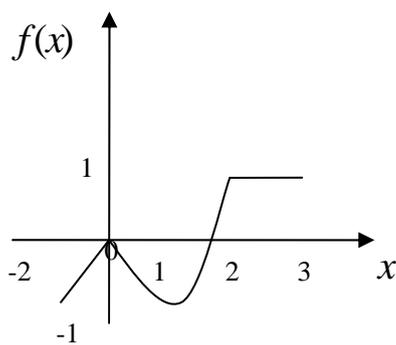
(A).



(B).



(C).



(D).

【答案】D

【解析】此题为定积分的应用知识考核，由  $y = f(x)$  的图形可见，其图像与  $x$  轴及  $y$  轴、

$x = x_0$  所围的图形的代数面积为所求函数  $F(x)$ ，从而可得出几个方面的特征：

- ①  $x \in [0, 1]$  时， $F(x) \leq 0$ ，且单调递减.
  - ②  $x \in [1, 2]$  时， $F(x)$  单调递增.
  - ③  $x \in [2, 3]$  时， $F(x)$  为常函数.
  - ④  $x \in [-1, 0]$  时， $F(x) \leq 0$  为线性函数，单调递增.
  - ⑤ 由于  $F(x)$  为连续函数
- 结合这些特点，可见正确选项为 D.

(7) 设  $A$ ， $B$  均为 2 阶矩阵， $A^*$ ， $B^*$  分别为  $A$ ， $B$  的伴随矩阵. 若  $|A| = 2$ ， $|B| = 3$ ，则分

块矩阵  $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$  的伴随矩阵为 ( )

- (A).  $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$       (B).  $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$

$$(C). \begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix} \quad (D). \begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$$

【答案】 B

【解析】 根据  $CC^* = |C|E$  若  $C^* = |C|C^{-1}, C^{-1} = \frac{1}{|C|}C^*$

分块矩阵  $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$  的行列式  $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{2 \times 2} |A||B| = 2 \times 3 = 6$  即分块矩阵可逆

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & \frac{1}{3}B^* \\ \frac{1}{2}A^* & O \end{pmatrix}$$

(8) 设  $A, P$  均为 3 阶矩阵,  $P^T$  为  $P$  的转置矩阵, 且  $P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 若

$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ , 则  $Q^T A Q$  为 ( )

$$(A). \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (B). \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(C). \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (D). \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

【答案】 A

【解析】  $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) E_{12}(1)$ , 即:

$$\begin{aligned}
Q &= PE_{12}(1) \\
Q^T A Q &= [PE_{12}(1)]^T A [PE_{12}(1)] = E_{12}^T(1) [P^T A P] E_{12}(1) \\
&= E_{21}^T(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} E_{12}(1) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线  $\begin{cases} x = \int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y = t^2 \ln(2-t^2) \end{cases}$  在  $(0, 0)$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

【答案】  $y = 2x$

【解析】  $\frac{dy}{dt} = 2t \ln(2-t^2) - t^2 \cdot \frac{2t}{2-t^2} \Big|_{t=1} = -2$

$\frac{dx}{dt} = e^{-(1-t)^2} \cdot (-1) \Big|_{t=1} = -1$

所以  $\frac{dy}{dx} = 2$

所以 切线方程为  $y = 2x$ .

(10) 已知  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 1$ , 则  $k =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $-2$

【解析】  $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{kx} dx = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} e^{kx} \Big|_0^b$

因为极限存在所以  $k < 0$

$1 = 0 - \frac{2}{k}$

$k = -2$

(11)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-x} \sin nxdx =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $0$

【解析】 令  $I_n = \int e^{-x} \sin nxdx = -e^{-x} \sin nx + n \int e^{-x} \cos nxdx$

$= -e^{-x} \sin nx - ne^{-x} \cos nx - n^2 I_n$

所以  $I_n = -\frac{n \cos nx + \sin nx}{n^2 + 1} e^{-x} + C$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-x} \sin nxdx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{n \cos nx + \sin nx}{n^2 + 1} e^{-x} \Big|_0^1 \right)$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{n \cos n + \sin n}{n^2 + 1} e^{-1} + \frac{n}{n^2 + 1} \right)$   
 $= 0$

(12) 设  $y = y(x)$  是由方程  $xy + e^y = x + 1$  确定的隐函数, 则  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】 -3

【解析】对方程  $xy + e^y = x + 1$  两边关于  $x$  求导有  $y + xy' + y'e^y = 1$ , 得  $y' = \frac{1-y}{x+e^y}$

对  $y + xy' + y'e^y = 1$  再次求导可得  $2y' + xy'' + y''e^y + (y')^2 e^y = 0$ ,

得  $y'' = -\frac{2y' + (y')^2 e^y}{x + e^y}$  (\*)

当  $x=0$  时,  $y=0$ ,  $y'_{(0)} = \frac{1-0}{e^0} = 1$ , 代入(\*)得

$y''(0) = -\frac{2y'(0) + (y'(0))^2 e^0}{(0+e^0)^3} = -(2+1) = -3$

(13) 函数  $y = x^{2x}$  在区间  $(0,1]$  上的最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $e^{-\frac{2}{e}}$

【解析】因为  $y' = x^{2x} (2 \ln x + 2)$ , 令  $y' = 0$  得驻点为  $x = \frac{1}{e}$ .

又  $y'' = x^{2x} (2 \ln x + 2)^2 + x^{2x} \cdot \frac{2}{x}$ , 得  $y'' \left( \frac{1}{e} \right) = 2e^{-\frac{2}{e}+1} > 0$ ,

故  $x = \frac{1}{e}$  为  $y = x^{2x}$  的极小值点, 此时  $y = e^{-\frac{2}{e}}$ ,

又当  $x \in \left( 0, \frac{1}{e} \right)$  时,  $y'(x) < 0$ ;  $x \in \left( \frac{1}{e}, 1 \right]$  时,  $y'(x) > 0$ , 故  $y$  在  $\left( 0, \frac{1}{e} \right)$  上递减, 在  $\left( \frac{1}{e}, 1 \right)$

上递增.

而  $y(1) = 1$ ,  $y_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (-2x)} = 1$ ,

所以  $y = x^{2x}$  在区间  $(0,1]$  上的最小值为  $y\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{2}{e}}$ .

(14) 设  $\alpha, \beta$  为 3 维列向量,  $\beta^T$  为  $\beta$  的转置, 若矩阵  $\alpha\beta^T$  相似于  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则

$$\beta^T \alpha = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 2

【解析】 因为  $\alpha\beta^T$  相似于  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 根据相似矩阵有相同的特征值, 得到  $\alpha\beta^T$  得特征值是 2, 0, 0 而  $\beta^T \alpha$  是一个常数, 是矩阵  $\alpha\beta^T$  的对角元素之和, 则  $\beta^T \alpha = 2 + 0 + 0 = 2$

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 9 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$ .

【解析】 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2 [x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{\sin^2 x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{\sin^2 x} = \frac{1}{4}$$

(16) (本题满分 10 分)

计算不定积分  $\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx \quad (x > 0)$ .

【解析】

令  $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$  得  $x = \frac{1}{t^2 - 1}$ ,  $dx = \frac{-2tdt}{(t^2 - 1)^2}$

$$\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx = \int \ln(1+t) d\frac{1}{t^2 - 1}$$

$$= \frac{\ln(1+t)}{t^2 - 1} - \int \frac{1}{t^2 - 1} \frac{1}{t+1} dt$$

而

$$\int \frac{1}{t^2-1} \frac{1}{t+1} dt = \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} - \frac{2}{(t+1)^2} \right) dt$$

$$\frac{1}{4} \ln(t-1) - \frac{1}{4} \ln(t+1) + 2 \frac{1}{t+1} + C$$

所以

$$\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} + \frac{1}{4} \ln \frac{t+1}{t-1} - \frac{1}{2(t+1)} + C$$

$$= x \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} + C$$

$$= x \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sqrt{x+x^2} + C$$

(17) (本题满分 10 分)

设  $z = f(x+y, x-y, xy)$ , 其中  $f$  具有 2 阶连续偏导数, 求  $dz$  与  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

【解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 + f'_2 + yf'_3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 - f'_2 + xf'_3$$

$$\therefore dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$= (f'_1 + f'_2 + yf'_3) dx + (f'_1 - f'_2 + xf'_3) dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{11} \cdot 1 + f''_{12} \cdot (-1) + f''_{13} \cdot x + f''_{21} \cdot 1 + f''_{22} \cdot (-1) + f''_{23} \cdot x + f'_3 + y[f''_{31} \cdot 1 + f''_{32} \cdot (-1) + f''_{33} \cdot x]$$

$$= f'_3 + f''_{11} - f''_{22} + xyf''_{33} + (x+y)f''_{13} + (x-y)f''_{23}$$

(18) (本题满分 10 分) 设非负函数  $y = y(x)$  ( $x \geq 0$ ) 满足微分方程  $xy'' - y' + 2 = 0$ , 当

曲线  $y = y(x)$  过原点时, 其与直线  $x=1$  及  $y=0$  围成平面区域  $D$  的面积为 2, 求  $D$  绕  $y$  轴旋转所得旋转体体积.

【解析】

解微分方程  $xy'' - y' + 2 = 0$  得其通解  $y = C_1 + 2x + C_2 x^2$ , 其中  $C_1, C_2$  为任意常数

又因为  $y = y(x)$  通过原点时与直线  $x=1$  及  $y=0$  围成平面区域的面积为 2, 于是可得

$$C_1 = 0$$

$$2 = \int_0^1 y(x) dx = \int_0^1 (2x + C_2 x^2) dx = \left( x^2 + \frac{C_2}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = 1 + \frac{C_2}{3}$$

从而  $C_2 = 3$

于是, 所求非负函数  $y = 2x + 3x^2$  ( $x \geq 0$ )

又由  $y = 2x + 3x^2$  可得, 在第一象限曲线  $y = f(x)$  表示为  $x = \frac{1}{3}(\sqrt{1+3y}-1)$

于是  $D$  围绕  $y$  轴旋转所得旋转体的体积为  $V = 5\pi - V_1$ , 其中

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^5 \pi x^2 dy = \int_0^5 \pi \cdot \frac{1}{9} (\sqrt{1+3y}-1)^2 dy \\ &= \frac{\pi}{9} \int_0^5 (2+3y-2\sqrt{1+3y}) dy \\ &= \frac{39}{18} \pi \end{aligned}$$

$$V = 5\pi - \frac{39}{18} \pi = \frac{51}{18} \pi = \frac{17}{6} \pi.$$

(19) (本题满分10分) 计算二重积分  $\iint_D (x-y) dx dy$ , 其中

$$D = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}.$$

【解析】由  $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$  得  $r \leq 2(\sin \theta + \cos \theta)$ ,

$$\therefore \iint_D (x-y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\theta \int_0^{2(\sin \theta + \cos \theta)} (r \cos \theta - r \sin \theta) r dr$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \left[ \frac{1}{3} (\cos \theta - \sin \theta) \cdot r^3 \Big|_0^{2(\sin \theta + \cos \theta)} \right] d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{8}{3} (\cos \theta - \sin \theta) \cdot (\sin \theta + \cos \theta) \cdot (\sin \theta + \cos \theta)^2 d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{8}{3} (\cos \theta - \sin \theta) \cdot (\sin \theta + \cos \theta)^3 d\theta \\
&= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (\sin \theta + \cos \theta)^3 d(\sin \theta + \cos \theta) = \frac{8}{3} \times \frac{1}{4} (\sin \theta + \cos \theta)^4 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = -\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

(20) (本题满分 12 分)

设  $y = y(x)$  是区间  $(-\pi, \pi)$  内过点  $(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}})$  的光滑曲线, 当  $-\pi < x < 0$  时, 曲线上任一点处的法线都过原点, 当  $0 \leq x < \pi$  时, 函数  $y(x)$  满足  $y'' + y + x = 0$ . 求  $y(x)$  的表达式.

【解析】由题意, 当  $-\pi < x < 0$  时,  $y = -\frac{x}{y'}$ , 即  $y dy = -x dx$ , 得  $y^2 = -x^2 + c$ ,

又  $y(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  代入  $y^2 = -x^2 + c$  得  $c = \pi^2$ , 从而有  $x^2 + y^2 = \pi^2$

当  $0 \leq x < \pi$  时,  $y'' + y + x = 0$  得  $y'' + y = 0$  的通解为  $y^* = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

令解为  $y_1 = Ax + b$ , 则有  $0 + Ax + b + x = 0$ , 得  $A = -1, b = 0$ ,

故  $y_1 = -x$ , 得  $y'' + y + x = 0$  的通解为  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x$

由于  $y = y(x)$  是  $(-\pi, \pi)$  内的光滑曲线, 故  $y$  在  $x = 0$  处连续

于是由  $y(0^-) = \pm\pi$ ,  $y(0^+) = c_1$ , 故  $c_1 = \pm\pi$  时,  $y = y(x)$  在  $x = 0$  处连续

又当  $-\pi < x < 0$  时, 有  $2x + 2y \cdot y' = 0$ , 得  $y_-'(0) = -\frac{x}{y} = 0$ ,

当  $0 \leq x < \pi$  时, 有  $y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x - 1$ , 得  $y_+'(0) = c_2 - 1$

由  $y_-'(0) = y_+'(0)$  得  $c_2 - 1 = 0$ , 即  $c_2 = 1$

故  $y = y(x)$  的表达式为  $y = \begin{cases} -\sqrt{\pi^2 - x^2}, & -\pi < x < 0 \\ -\pi \cos x + \sin x - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$  或

$$y = \begin{cases} \sqrt{\pi^2 - x^2}, & -\pi < x < 0 \\ \pi \cos x + \sin x - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}, \text{ 又过点 } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{所以 } y = \begin{cases} \sqrt{\pi^2 - x^2}, & -\pi < x < 0 \\ \pi \cos x + \sin x - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}.$$

(21) (本题满分 11 分)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  可导, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ ;

(II) 证明: 若函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 在  $(0, \delta)$  ( $\delta > 0$ ) 内可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$ , 则  $f'_+(0)$  存在, 且  $f'_+(0) = A$ .

【解析】(I) 作辅助函数  $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ , 易验证  $\varphi(x)$  满足:

$\varphi(a) = \varphi(b)$ ;  $\varphi(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 在开区间  $(a, b)$  内可导, 且

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

根据罗尔定理, 可得在  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$ , 使  $\varphi'(\xi) = 0$ , 即

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \therefore f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

(II) 任取  $x_0 \in (0, \delta)$ , 则函数  $f(x)$  满足:

在闭区间  $[0, x_0]$  上连续, 开区间  $(0, x_0)$  内可导, 从而有拉格朗日中值定理可得: 存在

$$\xi_{x_0} \in (0, x_0) \subset (0, \delta), \text{ 使得 } f'(\xi_{x_0}) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} \dots\dots (*)$$

又由于  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$ , 对上式 (\*式) 两边取  $x_0 \rightarrow 0^+$  时的极限可得:

$$f'_+(0) = \lim_{x_0 \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \lim_{x_0 \rightarrow 0^+} f'(\xi_{x_0}) = \lim_{\xi_{x_0} \rightarrow 0^+} f'(\xi_{x_0}) = A$$

故  $f'_+(0)$  存在, 且  $f'_+(0) = A$ .

$$(22) \text{ (本题满分 11 分) 设 } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(I) 求满足  $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$  的所有向量  $\xi_2, \xi_3$ ;

(II) 对 (I) 中的任一向量  $\xi_2, \xi_3$ , 证明:  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  线性无关.

【解析】(I) 解方程  $A\xi_2 = \xi_1$

$$(A, \xi_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$  故有一个自由变量, 令  $x_3 = 2$ , 由  $Ax = 0$  解得,  $x_2 = -1, x_1 = 1$

求特解, 令  $x_1 = x_2 = 0$ , 得  $x_3 = 1$

$$\text{故 } \xi_2 = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k_1 \text{ 为任意常数}$$

解方程  $A^2\xi_3 = \xi_1$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A^2, \xi_1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故有两个自由变量, 令  $x_2 = -1$ , 由  $A^2x = 0$  得  $x_1 = 1, x_3 = 0$

$$\text{求特解 } \eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 故 } \xi_3 = k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k_2 \text{ 为任意常数.}$$

(II) 证明:

$$\text{由于 } \begin{vmatrix} -1 & k_1 & k_2 + \frac{1}{2} \\ 1 & -k_1 & -k_2 \\ -2 & 2k_1 + 1 & 0 \end{vmatrix} = 2k_1k_2 + (2k_1 + 1)(k_2 + \frac{1}{2}) - 2k_1(k_2 + \frac{1}{2}) - k_2(2k_1 + 1)$$

$$= \frac{1}{2} \neq 0 \quad \text{故 } \xi_1, \xi_2, \xi_3 \text{ 线性无关.}$$

(23) (本题满分 11 分) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

(I) 求二次型  $f$  的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次型  $f$  的规范形为  $y_1^2 + y_2^2$ , 求  $a$  的值.

【解析】(I)  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a) \begin{vmatrix} \lambda - a & 1 \\ 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \lambda - a \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a)[(\lambda - a)(\lambda - a + 1) - 1] - [0 + (\lambda - a)]$$

$$= (\lambda - a)[(\lambda - a)(\lambda - a + 1) - 2]$$

$$= (\lambda - a)[\lambda^2 - 2a\lambda + \lambda + a^2 - a - 2]$$

$$= (\lambda - a)\left\{ [a\lambda + \frac{1}{2}(1 - 2a)]^2 - \frac{9}{4} \right\}$$

$$= (\lambda - a)(\lambda - a + 2)(\lambda - a - 1)$$

$$\therefore \lambda_1 = a, \lambda_2 = a - 2, \lambda_3 = a + 1$$

(II) 若规范形为  $y_1^2 + y_2^2$ , 说明有两个特征值为正, 一个为 0. 则

1) 若  $\lambda_1 = a = 0$ , 则  $\lambda_2 = -2 < 0$ ,  $\lambda_3 = 1$ , 不符题意

2) 若  $\lambda_2 = 0$ , 即  $a = 2$ , 则  $\lambda_1 = 2 > 0$ ,  $\lambda_3 = 3 > 0$ , 符合

3) 若  $\lambda_3 = 0$ , 即  $a = -1$ , 则  $\lambda_1 = -1 < 0$ ,  $\lambda_2 = -3 < 0$ , 不符题意

综上所述, 故  $a = 2$