

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

(1) 设  $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$ ，则  $f'(x)$  的零点个数为 ( )

- (A) 0      (B) 1      (C) 2      (D) 3

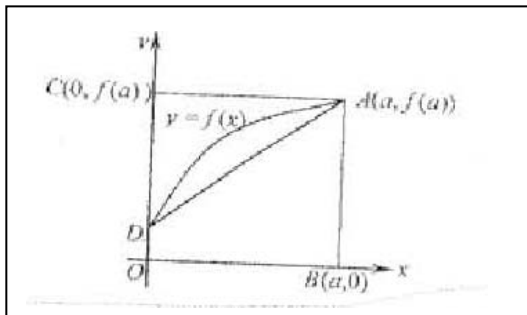
(2) 曲线方程为  $y = f(x)$  函数在区间  $[0, a]$  上有连续导数，则定积分  $\int_0^a af'(x)dx$  ( )

(A) 曲边梯形  $ABCD$  面积.

(B) 梯形  $ABCD$  面积.

(C) 曲边三角形  $ACD$  面积.

(D) 三角形  $ACD$  面积.



(3) 在下列微分方程中，以  $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$  ( $C_1, C_2, C_3$  为任意常数) 为通解的是 ( )

(A)  $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$       (B)  $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$

(C)  $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$       (D)  $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

(5) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内单调有界， $\{x_n\}$  为数列，下列命题正确的是 ( )

(A) 若  $\{x_n\}$  收敛，则  $\{f(x_n)\}$  收敛.      (B) 若  $\{x_n\}$  单调，则  $\{f(x_n)\}$  收敛.

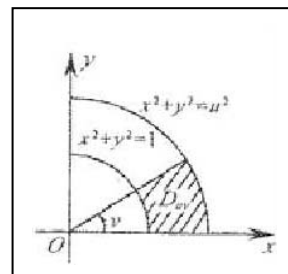
(C) 若  $\{f(x_n)\}$  收敛，则  $\{x_n\}$  收敛.      (D) 若  $\{f(x_n)\}$  单调，则  $\{x_n\}$  收敛.

(6) 设函数  $f$  连续，若  $F(u, v) = \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ ，其中区域  $D_{uv}$  为图中阴影部分，则

$$\frac{\partial F}{\partial u} =$$

(A)  $vf(u^2)$       (B)  $\frac{v}{u} f(u^2)$

(C)  $vf(u)$       (D)  $\frac{v}{u} f(u)$



(7) 设  $A$  为  $n$  阶非零矩阵， $E$  为  $n$  阶单位矩阵. 若  $A^3 = 0$ ，则 ( )

(A)  $E - A$  不可逆， $E + A$  不可逆.      (B)  $E - A$  不可逆， $E + A$  可逆.

(C)  $E - A$  可逆， $E + A$  可逆.      (D)  $E - A$  可逆， $E + A$  不可逆.

(8) 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 则在实数域上与  $A$  合同的矩阵为 ( )

(A)  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ . (B)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . (D)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 已知函数  $f(x)$  连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos[xf(x)]}{(e^{x^2} - 1)f(x)} = 1$ , 则  $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(10) 微分方程  $(y + x^2 e^{-x})dx - xdy = 0$  的通解是  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(11) 曲线  $\sin(xy) + \ln(y - x) = x$  在点  $(0, 1)$  处的切线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(12) 曲线  $y = (x - 5)x^{\frac{2}{3}}$  的拐点坐标为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(13) 设  $z = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(14) 设 3 阶矩阵  $A$  的特征值为  $2, 3, \lambda$ . 若行列式  $|2A| = -48$ , 则  $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题: 15-23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 9 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$ .

(16) (本题满分 10 分)

设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = \int_0^{t^2} \ln(1+u) du \end{cases}$  确定, 其中  $x(t)$  是初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0 \\ x|_{t=0} = 0 \end{cases} \text{ 的解. 求 } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

(17) (本题满分 9 分) 求积分  $\int_0^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

(18) (本题满分 11 分)

求二重积分  $\iint_D \max(xy, 1) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$

(19) (本题满分 11 分)

设  $f(x)$  是区间  $[0, +\infty)$  上具有连续导数的单调增加函数, 且  $f(0) = 1$ . 对任意的  $t \in [0, +\infty)$ , 直线  $x = 0, x = t$ , 曲线  $y = f(x)$  以及  $x$  轴所围成的曲边梯形绕  $x$  轴旋转一周生成一旋转体. 若该旋转体的侧面积在数值上等于其体积的 2 倍, 求函数  $f(x)$  的表达式.

(20) (本题满分 11 分)

(1) 证明积分中值定理: 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则至少存在一点  $\eta \in [a, b]$ , 使得  $\int_a^b f(x) dx = f(\eta)(b - a)$

(2) 若函数  $\varphi(x)$  具有二阶导数, 且满足  $\varphi(2) > \varphi(1), \varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x) dx$ , 证明至少存在一点  $\xi \in (1, 3)$ , 使得  $\varphi''(\xi) < 0$

(21) (本题满分 11 分)

求函数  $u = x^2 + y^2 + z^2$  在约束条件  $z = x^2 + y^2$  和  $x + y + z = 4$  下的最大值与最小值.

(22) (本题满分 12 分)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & 0 & \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n \times n}$ , 现矩阵  $A$  满足方程  $AX = B$ , 其中

$$X = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad B = (1, 0, \dots, 0),$$

(1) 求证  $|A| = (n+1)a^n$ ;

(2)  $a$  为何值, 方程组有唯一解, 并求  $x_1$ ;

(3)  $a$  为何值, 方程组有无穷多解, 并求通解.

(23) (本题满分 10 分)

设  $A$  为 3 阶矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2$  为  $A$  的分别属于特征值  $-1, 1$  特征向量, 向量  $\alpha_3$  满足  $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$ ,

(1) 证明  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关;

(2) 令  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , 求  $P^{-1}AP$ .

## 2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

### 一、选择题

#### (1) 【答案】 D

【详解】 因为  $f(0)=f(1)=f(2)=0$ ，由罗尔定理知至少有  $\xi_1 \in (0,1)$ ， $\xi_2 \in (1,2)$  使  $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$ ，所以  $f'(x)$  至少有两个零点. 又  $f'(x)$  中含有因子  $x$ ，故  $x=0$  也是  $f'(x)$  的零点，D 正确.

本题的难度值为 0.719.

#### (2) 【答案】 C

$$\text{【详解】 } \int_0^a xf'(x)dx = \int_0^a xdf(x) = xf(x)\Big|_0^a - \int_0^a f(x)dx = af(a) - \int_0^a f(x)dx$$

其中  $af(a)$  是矩形  $ABOC$  面积， $\int_0^a f(x)dx$  为曲边梯形  $ABOD$  的面积，所以  $\int_0^a xf'(x)dx$  为曲边三角形的面积.

本题的难度值为 0.829.

#### (3) 【答案】 D

【详解】 由微分方程的通解中含有  $e^x$ 、 $\cos 2x$ 、 $\sin 2x$  知齐次线性方程所对应的特征方程有根  $r=1, r=\pm 2i$ ，所以特征方程为  $(r-1)(r-2i)(r+2i)=0$ ，即  $r^3-r^2+4r-4=0$ . 故以已知函数为通解的微分方程是  $y'''-y''+y'-4=0$

本题的难度值为 0.832.

#### (4) 【答案】 A

【详解】  $x=0, x=1$  时  $f(x)$  无定义，故  $x=0, x=1$  是函数的间断点

$$\begin{aligned} \text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\csc x \cot x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\cos x} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{同理 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \sin x = \left( \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} \right) \sin 1 = \sin 1$$

所以  $x=0$  是可去间断点， $x=1$  是跳跃间断点.

本题的难度值为 0.486.

#### (5) 【答案】 B

【详解】因为  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内单调有界, 且  $\{x_n\}$  单调. 所以  $\{f(x_n)\}$  单调且有界. 故

$\{f(x_n)\}$  一定存在极限.

本题的难度值为 0.537.

(6) 【答案】A

【详解】用极坐标得 
$$F(u, v) = \iint_D \frac{f(u^2 + v^2)}{\sqrt{u^2 + v^2}} du dv = \int_0^v dv \int_1^u \frac{f(r^2)}{r} r dr = v \int_1^u f(r^2) dr$$

所以 
$$\frac{\partial F}{\partial u} = v f(u^2)$$

本题的难度值为 0.638.

(7) 【答案】C

【详解】 $(E - A)(E + A + A^2) = E - A^3 = E$ ,  $(E + A)(E - A + A^2) = E + A^3 = E$

故  $E - A, E + A$  均可逆.

本题的难度值为 0.663.

(8) 【答案】D

【详解】记  $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,

则  $|\lambda E - D| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4$ , 又  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4$

所以  $A$  和  $D$  有相同的特征多项式, 所以  $A$  和  $D$  有相同的特征值.

又  $A$  和  $D$  为同阶实对称矩阵, 所以  $A$  和  $D$  相似. 由于实对称矩阵相似必合同, 故  $D$  正确.

本题的难度值为 0.759.

## 二、填空题

(9) 【答案】2

【详解】
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos[xf(x)]}{(e^{x^2} - 1)f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2[xf(x)/2]}{x^2 f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2[xf(x)/2] \cdot f(x)}{[xf(x)/2]^2 \cdot 4}$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} f(0) = 1$$

所以  $f(0) = 2$

本题的难度值为 0.828.

(10) 【答案】 $x(-e^{-x} + C)$

【详解】微分方程  $(y + x^2 e^{-x}) dx - x dy = 0$  可变形为  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x e^{-x}$

所以 
$$y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[ \int x e^{-x} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] = x \left( \int x e^{-x} \cdot \frac{1}{x} dx + C \right) = x(-e^{-x} + C)$$

本题的难度值为 0.617.

(11) 【答案】  $y = x + 1$

【详解】 设  $F(x, y) = \sin(xy) + \ln(y - x) - x$ , 则  $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y \cos(xy) - \frac{1}{y-x} - 1}{x \cos(xy) + \frac{1}{y-x}}$ ,

将  $y(0) = 1$  代入得  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 1$ , 所以切线方程为  $y - 1 = x - 0$ , 即  $y = x + 1$

本题的难度值为 0.759.

(12) 【答案】  $(-1, -6)$

【详解】  $y = x^{5/3} - 5x^{2/3} \Rightarrow y' = \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{10}{3}x^{-1/3} = \frac{10(x+2)}{3x^{1/3}}$   
 $\Rightarrow y'' = \frac{10}{9}x^{-1/3} + \frac{10}{9}x^{-4/3} = \frac{10(x+1)}{9x^{4/3}}$

$x = -1$  时,  $y'' = 0$ ;  $x = 0$  时,  $y''$  不存在

在  $x = -1$  左右近旁  $y''$  异号, 在  $x = 0$  左右近旁  $y'' > 0$ , 且  $y(-1) = -6$

故曲线的拐点为  $(-1, -6)$

本题的难度值为 0.501.

(13) 【答案】  $\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2 - 1)$

【详解】 设  $u = \frac{y}{x}, v = \frac{x}{y}$ , 则  $z = u^v$

所以  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = vu^{v-1}(-\frac{y}{x^2}) + u^v \ln u \cdot \frac{1}{y}$   
 $= u^v \left( -\frac{vy}{ux^2} + \frac{\ln u}{y} \right) = \left( \frac{y}{x} \right)^{x/y} \cdot \frac{1}{y} \left( -1 + \ln \frac{y}{x} \right)$

所以  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2 - 1)$

本题的难度值为 0.575.

(14) 【答案】 -1

【详解】  $Q \quad |A| = 2 \times 3 \times \lambda = 6\lambda \quad |2A| = 2^3 |A|$

$$\therefore 2^3 \times 6\lambda = -48 \quad \Rightarrow \lambda = -1$$

本题的难度值为 0.839.

### 三、解答题

(15) 【详解】

方法一:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(\sin x) \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin^2 x}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

方法二:  $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad \sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6}\sin^3 x + o(\sin^3 x)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin^4 x}{6x^4} + \frac{o(\sin^4 x)}{x^4} \right] = \frac{1}{6}$$

本题的难度值为 0.823.

(16) 【详解】

方法一: 由  $\frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0$  得  $e^x dx = 2tdt$ , 积分并由条件  $x|_{t=0}$  得  $e^x = 1+t^2$ , 即  $x = \ln(1+t^2)$

所以  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ln(1+t^2) \cdot 2t}{\frac{2t}{1+t^2}} = (1+t^2) \ln(1+t^2)$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} [(1+t^2) \ln(1+t^2)]}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t \ln(1+t^2) + 2t}{\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$= (1+t^2)[\ln(1+t^2) + 1]$$

方法二: 由  $\frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0$  得  $e^x dx = 2tdt$ , 积分并由条件  $x|_{t=0}$  得  $e^x = 1+t^2$ , 即  $x = \ln(1+t^2)$

所以  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ln(1+t^2) \cdot 2t}{\frac{2t}{1+t^2}} = (1+t^2) \ln(1+t^2) = e^x x$

所以  $\frac{d^2 y}{dx^2} = e^x (x+1)$

本题的难度值为 0.742.

(17) 【详解】

方法一: 由于  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$ , 故  $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$  是反常积分.

令  $\arcsin x = t$ , 有  $x = \sin t$ ,  $t \in [0, \pi/2)$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin^2 t}{\cos t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{t}{2} - \frac{t \cos 2t}{2} \right) dt \\
&= \frac{t^2}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t d \sin 2t = \frac{\pi^2}{16} - \frac{t \sin 2t}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt \\
&= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{8} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

方法二:  $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 d(\arcsin x)^2$

$$= \frac{1}{2} x^2 (\arcsin x)^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 x (\arcsin x)^2 dx = \frac{\pi^2}{8} - \int_0^1 x (\arcsin x)^2 dx$$

令  $\arcsin x = t$ , 有  $x = \sin t$ ,  $t \in [0, \pi/2)$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x (\arcsin x)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 d \cos 2t \\
&= -\frac{1}{4} (t^2 \cos 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos 2t dt = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

故, 原式 =  $\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$

本题的难度值为 0.631.

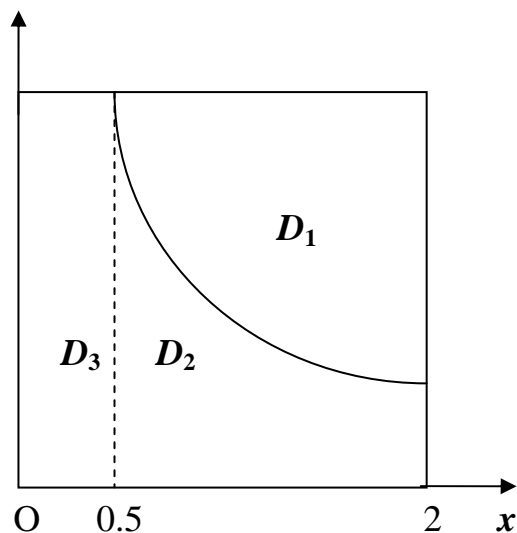
(18) 【详解】 曲线  $xy=1$  将区域分成两

个区域  $D_1$  和  $D_2 + D_3$ , 为了便于计算继续对

区域分割, 最后为

$$\begin{aligned}
&\iint_D \max(xy, 1) dx dy \\
&= \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} dx dy + \iint_{D_3} dx dy \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^2 1 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} 1 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy \\
&= 1 + 2 \ln 2 + \frac{15}{4} - \ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2
\end{aligned}$$

本题的难度值为 0.524.



(19) 【详解】 旋转体的体积  $V = \pi \int_0^t f^2(x) dx$ , 侧面积  $S = 2\pi \int_0^t f(x) \sqrt{1+f'^2(x)} dx$ , 由题



设条件知

$$\int_0^t f^2(x)dx = \int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

上式两端对  $t$  求导得  $f^2(t) = f(t)\sqrt{1+f'^2(t)}$ , 即  $y' = \sqrt{y^2-1}$

由分离变量法解得  $\ln(y + \sqrt{y^2-1}) = t + C_1$ , 即  $y + \sqrt{y^2-1} = Ce^t$

将  $y(0)=1$  代入知  $C=1$ , 故  $y + \sqrt{y^2-1} = e^t$ ,  $y = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$

于是所求函数为  $y = f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

本题的难度值为 0.497.

(20) 【详解】(I) 设  $M$  与  $m$  是连续函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值与最小值, 即

$$m \leq f(x) \leq M \quad x \in [a, b]$$

由定积分性质, 有  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ , 即  $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$

由连续函数介值定理, 至少存在一点  $\eta \in [a, b]$ , 使得  $f(\eta) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

即  $\int_a^b f(x)dx = f(\eta)(b-a)$

(II) 由(I)的结论可知至少存在一点  $\eta \in [2, 3]$ , 使  $\int_2^3 \varphi(x)dx = \varphi(\eta)(3-2) = \varphi(\eta)$

又由  $\varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x)dx = \varphi(\eta)$ , 知  $2 < \eta \leq 3$

对  $\varphi(x)$  在  $[1, 2][2, \eta]$  上分别应用拉格朗日中值定理, 并注意到  $\varphi(1) < \varphi(2)$ ,  $\varphi(\eta) < \varphi(2)$  得

$$\varphi'(\xi_1) = \frac{\varphi(2) - \varphi(1)}{2-1} > 0 \quad 1 < \xi_1 < 2$$

$$\varphi'(\xi_2) = \frac{\varphi(\eta) - \varphi(2)}{\eta-2} < 0 \quad 2 < \xi_2 < \eta \leq 3$$

在  $[\xi_1, \xi_2]$  上对导函数  $\varphi'(x)$  应用拉格朗日中值定理, 有

$$\varphi''(\xi) = \frac{\varphi'(\xi_2) - \varphi'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0 \quad \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (1, 3)$$

本题的难度值为 0.719.

(21) 【详解】

方法一: 作拉格朗日函数  $F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 4)$

$$\text{令} \begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ F'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ F'_z = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0 \\ F'_\mu = x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

解方程组得  $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 2), (x_2, y_2, z_2) = (-2, -2, 8)$

故所求的最大值为 72, 最小值为 6.

**方法二:** 问题可转化为求  $u = x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4$  在  $x + y + x^2 + y^2 = 4$  条件下的最值

设  $F(x, y, \lambda) = u = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + \lambda(x + y + x^2 + y^2 - 4)$

$$\text{令} \begin{cases} F'_x = 4x^3 + 4xy^2 + 2x + \lambda(1 + 2x) = 0 \\ F'_y = 4y^3 + 4x^2y + 2y + \lambda(1 + 2y) = 0 \\ F'_\lambda = x + y + x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

解得  $(x_1, y_1) = (1, 1), (x_2, y_2) = (-2, -2)$ , 代入  $z = x^2 + y^2$ , 得  $z_1 = 2, z_2 = 8$

故所求的最大值为 72, 最小值为 6.

本题的难度值为 0.486.

(22) 【详解】(I)证法一:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 0 & & \\ & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - \frac{1}{2}ar_1} \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 0 & & \\ & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} = L$$

$$\xrightarrow{r_n - \frac{n-1}{n}ar_{n-1}} \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4a}{3} & 0 & & \\ & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & \frac{(n+1)a}{n} \end{vmatrix} = 2a \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{4a}{3} \cdots \frac{(n+1)a}{n} = (n+1)a^n$$

证法二: 记  $D_n = |A|$ , 下面用数学归纳法证明  $D_n = (n+1)a^n$ .

当  $n=1$  时,  $D_1 = 2a$ , 结论成立.

当  $n=2$  时,  $D_2 = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2$ , 结论成立.

假设结论对小于  $n$  的情况成立. 将  $D_n$  按第 1 行展开得

$$D_n = 2aD_{n-1} - \begin{vmatrix} a^2 & 1 & & & \\ 0 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}$$

$$= 2aD_{n-1} - a^2D_{n-2} = 2ana^{n-1} - a^2(n-1)a^{n-2} = (n+1)a^n$$

故  $|A| = (n+1)a^n$

**证法三:** 记  $D_n = |A|$ , 将其按第一列展开得  $D_n = 2aD_{n-1} - a^2D_{n-2}$ ,

所以  $D_n - aD_{n-1} = aD_{n-1} - a^2D_{n-2} = a(D_{n-1} - aD_{n-2})$

$$= a^2(D_{n-2} - aD_{n-3}) = \dots = a^{n-2}(D_2 - aD_1) = a^n$$

即  $D_n = a^n + aD_{n-1} = a^n + a(a^{n-1} + aD_{n-2}) = 2a^n + a^2D_{n-2}$

$$= \dots = (n-2)a^n + a^{n-2}D_2 = (n-1)a^n + a^{n-1}D_1$$

$$= (n-1)a^n + a^{n-1} \cdot 2a = (n+1)a^n$$

(II) 因为方程组有唯一解, 所以由  $Ax = B$  知  $|A| \neq 0$ , 又  $|A| = (n+1)a^n$ , 故  $a \neq 0$ .

由克莱姆法则, 将  $D_n$  的第 1 列换成  $b$ , 得行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 0 & \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n \times n} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 0 & \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} = D_{n-1} = na^{n-1}$$

所以  $x_1 = \frac{D_{n-1}}{D_n} = \frac{n}{(n+1)a}$

(III) 方程组有无穷多解, 由  $|A|=0$ , 有  $a=0$ , 则方程组为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mathbf{M} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathbf{M} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此时方程组系数矩阵的秩和增广矩阵的秩均为  $n-1$ , 所以方程组有无穷多解, 其通解为

$$k(1 \ 0 \ 0 \ \mathbf{L} \ 0)^T + (0 \ 1 \ 0 \ \mathbf{L} \ 0)^T, k \text{ 为任意常数.}$$

本题的难度值为 0.270.

(23) 【详解】(I)

证法一: 假设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关. 因为  $\alpha_1, \alpha_2$  分别属于不同特征值的特征向量, 故  $\alpha_1, \alpha_2$  线

性无关, 则  $\alpha_3$  可由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表出, 不妨设  $\alpha_3 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$ , 其中  $l_1, l_2$  不全为零(若

$l_1, l_2$  同时为 0, 则  $\alpha_3$  为 0, 由  $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$  可知  $\alpha_2 = 0$ , 而特征向量都是非 0 向量, 矛盾)

$$\text{Q } A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$$

$$\therefore A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_2 + l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2, \text{ 又 } A\alpha_3 = A(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2) = -l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$$

$$\therefore -l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 = \alpha_2 + l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2, \text{ 整理得: } 2l_1\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

则  $\alpha_1, \alpha_2$  线性相关, 矛盾. 所以,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关.

$$\text{证法二: 设存在数 } k_1, k_2, k_3, \text{ 使得 } k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \quad (1)$$

用  $A$  左乘(1)的两边并由  $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$  得

$$-k_1\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \quad (2)$$

$$(1)-(2) \text{ 得 } 2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = 0 \quad (3)$$

因为  $\alpha_1, \alpha_2$  是  $A$  的属于不同特征值的特征向量, 所以  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关, 从而

$k_1 = k_3 = 0$ , 代入(1)得  $k_2\alpha_2 = 0$ , 又由于  $\alpha_2 \neq 0$ , 所以  $k_2 = 0$ , 故  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关.

(II) 记  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , 则  $P$  可逆,

$$AP = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3)$$

$$=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

本题的难度值为 0.272.