

## 2007 年考研数学二真题

一. 选择题 (本题共 10 小题, 每小题 4 分, 满分 40 分, 在每小题给的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 与  $\sqrt{x}$  等价的无穷小量是 ( )

A.  $1 - e^{\sqrt{x}}$       B.  $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$       C.  $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$       D.  $1 - \cos \sqrt{x}$

(2) 函数  $f(x) = \frac{\frac{1}{x} + e}{x(e^x - e)} \tan x$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上的第一类间断点是  $x =$  ( )

A. 0      B. 1      C.  $-\frac{\pi}{2}$       D.  $\frac{\pi}{2}$

(3) 如图. 连续函数  $y = f(x)$  在区间  $[-3, -2], [2, 3]$  上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间  $[-2, 0], [0, 2]$  上图形分别是直径为 2 的上、下半圆周, 设  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , 则下列结论正确的是: ( )

A.  $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$       B.  $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$   
C.  $F(-3) = -\frac{3}{4}F(2)$       D.  $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$

(4) 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 下列命题错误的是 ( )

A. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $f(0) = 0$       B. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$  存在,  $f(0) = 0$   
C. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $f'(0) = 0$       D.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$  存在,  $f(0) = 0$

(5) 曲线  $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ , 渐近线的条数为 ( )

A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

(6) 设函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上具有二阶导数, 且  $f''(x) > 0$ , 令  $u_n = f(n) = 1, 2, \dots, n$ , 则下列结论正确的是 ( )

A. 若  $u_1 > u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必收敛      B. 若  $u_1 > u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必发散  
C. 若  $u_1 < u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必收敛      D. 若  $u_1 < u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必发散

(7) 二元函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处可微的一个充分条件是 ( )

A.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$   
B.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$ , 且  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$

C.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

D.  $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x,0) - f'_x(0,0)] = 0$ , 且  $\lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(x,0) - f'_y(0,0)] = 0$ ,

(8) 设函数  $f(x, y)$  连续, 则二次积分  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$  等于 ( )

A.  $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$       B.  $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dy$

C.  $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$       D.  $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$

(9) 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则下列向量组线性相关的是: ( )

(A)  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$       (B)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

(C)  $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$       (D)  $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$

(10) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则 A 与 B, ( )

(A) 合同, 且相似      (B) 合同, 但不相似

(C) 不合同, 但相似      (D) 既不合同, 也不相似

二. 填空题: 11-16 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上

(11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 曲线  $\begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$  上对应于  $t = \frac{\pi}{4}$  的点处的法线斜率为  $\underline{\hspace{2cm}}$

(13) 设函数  $y = \frac{1}{2x+3}$ , 则  $y^n(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 二阶常系数非齐次线性微分方程  $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$  的通解  $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

(15) 设  $f(u, v)$  是二元可微函数,  $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$ , 则  $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(16) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A^3$  的秩为\_\_\_\_\_.

三、解答题: 17—24 小题, 共 86 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) 设  $f(x)$  是区间  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  上单调、可导函数, 且满足  $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x t \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt$ ,

其中  $f^{-1}$  是  $f$  的反函数, 求  $f(x)$ .

(18) (本题满分 11 分)

设  $D$  是位于曲线  $y = \sqrt{xa} - x$  ( $a > 1, 0 \leq x < +\infty$ ) 下方、 $x$  轴上方的无界区域.

(I) 求区域  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所成旋转体的体积  $V(a)$ ;

(II) 当  $a$  为何值时,  $V(a)$  最小? 并求此最小值.

(19) 求微分方程  $y''(x + y'^2) = y'$  满足初始条件  $y(1) = y'(1) = 1$  的特解.

(20) 已知函数  $f(a)$  具有二阶导数, 且  $f'(0) = 1$ , 函数  $y = y(x)$  由方程  $y - xe^{y-1} = 1$  所确

定. 设  $z = f(\ln y - \sin x)$ , 求  $\frac{dz}{dx}\bigg|_{x=0}$ ,  $\frac{d^2z}{dx^2}\bigg|_{x=0}$ .

(21) (本题 11 分)

设函数  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内具有二阶导数且存在相等的最大值,

$f(a) = g(a), f(b) = g(b)$  证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) = g''(\xi)$ .

(22) (本题满分 11 分)

设二元函数  $f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1. \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 \leq |x| + |y| \leq 2. \end{cases}$

计算二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ . 其中  $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$

(23) (本题满分 11 分)

设线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

与方程  $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad (2)$

有公共解, 求  $a$  的值及所有公共解

(24) 设 3 阶对称矩阵  $A$  的特征向量值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ ,  $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$  是  $A$  的属于  $\lambda_1$  的

一个特征向量, 记  $B = A^5 - 4A^3 + E$  其中  $E$  为 3 阶单位矩阵

(I) 验证  $\alpha_1$  是矩阵  $B$  的特征向量, 并求  $B$  的全部特征值的特征向量;

(II) 求矩阵  $B$ .

## 2007 年考研数学二真题解析

一. 选择题 (本题共 10 小题, 每小题 4 分, 满分 40 分, 在每小题给的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后括号内)

(2) 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 与  $\sqrt{x}$  等价的无穷小量是 (B)

A.  $1 - e^{\sqrt{x}}$       B.  $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$       C.  $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$       D.  $1 - \cos \sqrt{x}$

(2) 函数  $f(x) = \frac{\frac{1}{e^x + e} \tan x}{x(e^x - e)}$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上的第一类间断点是  $x =$  (A)

A. 0      B. 1      C.  $-\frac{\pi}{2}$       D.  $\frac{\pi}{2}$

(3) 如图. 连续函数  $y = f(x)$  在区间  $[-3, -2], [2, 3]$  上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间  $[-2, 0], [0, 2]$  上图形分别是直径为 2 的上、下半圆周, 设  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , 则下列结论正确的是: (C)

A.  $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$       B.  $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$   
C.  $F(-3) = -\frac{3}{4}F(2)$       D.  $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$

(4) 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 下列命题错误的是 (C)

A. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $f(0) = 0$       B. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$  存在,  $f(0) = 0$   
C. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $f'(0) = 0$       D.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$  存在,  $f(0) = 0$

(5) 曲线  $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ , 渐近线的条数为 (D)

A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

(6) 设函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上具有二阶导数, 且  $f''(x) > 0$ , 令  $u_n = f(n) = 1, 2, \dots, n$ , 则下列结论正确的是 (D)

A. 若  $u_1 > u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必收敛      B. 若  $u_1 > u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必发散  
C. 若  $u_1 < u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必收敛      D. 若  $u_1 < u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必发散

(7) 二元函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处可微的一个充分条件是 (B)

A.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$   
B.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$ , 且  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$

C.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

D.  $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x,0) - f'_x(0,0)] = 0$ , 且  $\lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(x,0) - f'_y(0,0)] = 0$ ,

(8) 设函数  $f(x, y)$  连续, 则二次积分  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$  等于 (B)

A.  $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$       B.  $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dy$

C.  $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$       D.  $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$

(9) 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则下列向量组线性相关的是: (A)

(A)  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$       (B)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

(C)  $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$       (D)  $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$

(10) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则 A 与 B, (B)

(A) 合同, 且相似      (B) 合同, 但不相似

(C) 不合同, 但相似      (D) 既不合同, 也不相似

二. 填空题: 11-16 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上

(11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ .

(12) 曲线  $\begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$  上对应于  $t = \frac{\pi}{4}$  的点处的法线斜率为  $(\sqrt{2} - 1)$ .

(13) 设函数  $y = \frac{1}{2x+3}$ , 则  $y^n(0) = 2 \cdot 3^{-n}$ .

(14) 二阶常系数非齐次线性微分方程  $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$  的通解  $y = -C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}$ .

(15) 设  $f(u, v)$  是二元可微函数,  $z = f(\frac{y}{x}, \frac{x}{y})$ , 则

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{x} f'_1(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}) + \frac{2x}{y} f'_2(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}).$$

(16) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A^3$  的秩为 1\_\_\_\_\_.

三、解答题: 17—24 小题, 共 86 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) 设  $f(x)$  是区间  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  上单调、可导函数, 且满足  $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x t \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt$ ,

其中  $f^{-1}$  是  $f$  的反函数, 求  $f(x)$ .

【详解】:

设  $y = f(t)$ , 则  $t = f^{-1}(y)$ .

$$\text{则原式可化为: } \int_{f^{-1}(0)}^x y f'(y) dy = \int_0^x t \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt$$

$$\text{等式两边同时求导得: } x f'(x) = x \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

(18) (本题满分 11 分)

设  $D$  是位于曲线  $y = \sqrt{x}a - \frac{x}{2a}$  ( $a > 1, 0 \leq x < +\infty$ ) 下方、 $x$  轴上方的无界区域.

(I) 求区域  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所成旋转体的体积  $V(a)$ ;

(II) 当  $a$  为何值时,  $V(a)$  最小? 并求此最小值.

【详解】:

$$(I) V(a) = \int_0^{+\infty} \pi y^2 dx = \int_0^{+\infty} \pi \left( \sqrt{x}a - \frac{x}{2a} \right)^2 dx = \frac{a^2 \pi}{(\ln a)^2}$$

$$(II) V'(a) = \pi \cdot \frac{2a(\ln a)^2 - a^2(2\ln a) \frac{1}{a}}{(\ln a)^4} = 0 \quad \text{得 } \ln a(\ln a - 1) = 0$$

$$\text{故 } \ln a = 1$$

$$\text{即 } a = e \text{ 是唯一驻点, 也是最小值点, 最小值 } V(e) = e^2 \pi$$

(19) 求微分方程  $y''(x + y'^2) = y'$  满足初始条件  $y(1) = y'(1) = 1$  的特解.

【详解】:

$$\text{设 } p = y' = \frac{dy}{dx}, \text{ 则 } y'' = \frac{dp}{dx} \text{ 代入得:}$$

$$\frac{dp}{dx}(x+p^2)=p \Rightarrow \frac{dx}{dp}=\frac{x+p^2}{p}=\frac{x}{p}+p$$

$$\text{设 } \frac{x}{p}=u \quad \text{则 } \frac{d(pu)}{dp}=u+p \Rightarrow u+p \frac{du}{dp}=u+p \Rightarrow \frac{du}{dp}=1 \Rightarrow u=p+c_1$$

$$\text{即 } x=p^2+c_1p \quad \text{由于 } y'(1)=1$$

$$\text{故 } 1=1+c_1 \Rightarrow c_1=0$$

$$\text{即 } x=p^2 \Rightarrow p=\pm\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{x} \Rightarrow y=\pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c_2$$

$$\text{由 } y(1)=1 \Rightarrow c_2=\frac{1}{3} \text{ 或 } c_2=\frac{5}{3}$$

$$\text{特解为 } y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3} \text{ 或 } y=-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{3}$$

(20) 已知函数  $f(a)$  具有二阶导数, 且  $f'(0)=1$ , 函数  $y=y(x)$  由方程  $y-xe^{y-1}=1$  所确

定. 设  $z=f(\ln y-\sin x)$ , 求  $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}$ ,  $\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$ .

【详解】:

$$y-xe^{y-1}=1 \text{ 两边对 } x \text{ 求导得 } y'-(e^{y-1}+xe^{y-1} \cdot y')=0$$

$$\text{得 } y'=\frac{e^{y-1}}{1-xe^{y-1}} \quad (\text{当 } x=0, y=1)$$

$$\text{故有 } y'\big|_{x=0}=\frac{e^{1-1}}{2-1}=1$$

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}=f'(\ln y-\sin x)\left(\frac{1}{y}y'-\cos x\right)\bigg|_{x=0}=f'(0)(1 \times 1-1)=0$$

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0} &= f''(\ln y-\sin x)\left(\frac{1}{y}y'-\cos x\right)^2 + f'(\ln y-\sin x)\left(-\frac{(y')^2}{y^2}+\sin x\right)\bigg|_{x=0} \\ &= f''(0)(1 \times 1-1)^2 + f'(0)\left(\frac{-1}{1^2} \times 1+0\right)=1 \times (-1)=-1 \end{aligned}$$

(21) (本题 11 分)

设函数  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内具有二阶导数且存在相等的最大值,



$f(a) = g(a), f(b) = g(b)$  证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = g'(\xi)$ .

【详解】:

证明: 设  $f(x), g(x)$  在  $(a, b)$  内某点  $c \in (a, b)$  同时取得最大值, 则  $f(c) = g(c)$ , 此时的  $c$

就是所求点  $\eta$  使得  $f(\eta) = g(\eta)$ . 若两个函数取得最大值的点不同则有设

$f(c) = \max f(x), g(d) = \max g(x)$  故有  $f(c) - g(c) > 0, g(d) - f(d) < 0$ , 由介值定理,

在  $(c, d)$  内肯定存在  $\eta$  使得  $f(\eta) = g(\eta)$  由罗尔定理在区间  $(a, \eta), (\eta, b)$  内分别存在一点

$\xi_1, \xi_2$ , 使得  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$  在区间  $(\xi_1, \xi_2)$  内再用罗尔定理, 即

存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = g'(\xi)$ .

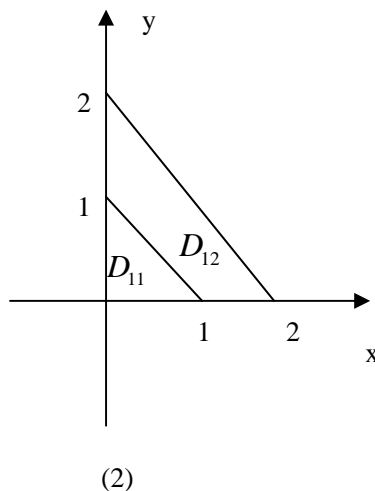
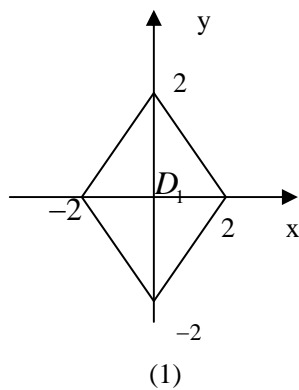
(22) (本题满分 11 分)

设二元函数  $f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1. \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 \leq |x| + |y| \leq 2. \end{cases}$

计算二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ . 其中  $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$

【详解】:  $D$  如图 (1) 所示, 它关于  $x, y$  轴对称,  $f(x, y)$  对  $x, y$  均为偶函数, 得

$\iint_D f(x, y) d\sigma = 4 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma$ , 其中  $D_1$  是  $D$  的第一象限部分.



由于被积函数分块表示, 将  $D_1$  分成 (如图 (2)):  $D_1 = D_{11} \cup D_{12}$ , 且

$D_{11}: |x| + |y| \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$        $D_{12}: 1 \leq |x| + |y| \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$

于是  $\iint_{D_1} f(x, y) d\sigma = \iint_{D_{12}} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_{12}} f(x, y) d\sigma$  .而

$$\iint_{D_{11}} f(x, y) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy = \int_0^1 x^2 (1-x) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_{12}} f(x, y) d\sigma &= \iint_{D_{12}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\cos \theta + \sin \theta}{1}}^{\frac{2}{\cos \theta + \sin \theta}} \frac{1}{r} \cdot r dr (\text{极坐标变换}) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2d(\tan \frac{\theta}{2})}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2} + 2 \tan \frac{\theta}{2}} = \int_0^1 \frac{2du}{1 - u^2 + 2u} = \int_0^1 \frac{2du}{2 - (u-1)^2} \\ &\stackrel{u-1=t}{=} \int_0^1 \frac{2dt}{2-t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left( \frac{1}{\sqrt{2}+t} + \frac{1}{\sqrt{2}-t} \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

所以

$$\iint_{D_1} f(x, y) d\sigma = \frac{1}{12} + \frac{2}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1)$$

得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 4 \left( \frac{1}{12} + \frac{2}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1) \right)$$

(23) (本题满分 11 分)

$$\text{设线性方程组} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{与方程 } x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad (2)$$

有公共解, 求  $a$  的值及所有公共解.

**【详解】:**

因为方程组(1)、(2)有公共解, 即由方程组(1)、(2)组成的方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \end{cases} \quad (3) \text{ 的解.}$$

$$\text{即矩阵} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+3a+4 & 0 \end{pmatrix} \text{方程组(3)有解的充要条件为}$$

$$a=1, a=2.$$

当  $a=1$  时, 方程组(3)等价于方程组(1)即此时的公共解为方程组(1)的解. 解方程组(1)的基

础解系为  $\xi = (1, 0, -1)^T$  此时的公共解为:  $x = k\xi, k=1, 2, \dots$

$$\text{当 } a=2 \text{ 时, 方程组(3)的系数矩阵为} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{此时方程组(3)}$$

的解为  $x_1=0, x_2=1, x_3=-1$ , 即公共解为:  $k(0, 1, -1)^T$

(24) 设 3 阶对称矩阵  $A$  的特征向量值  $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=-2$ ,  $\alpha_1=(1, -1, 1)^T$  是  $A$  的属于  $\lambda_1$  的

一个特征向量, 记  $B=A^5-4A^3+E$  其中  $E$  为 3 阶单位矩阵

(I) 验证  $\alpha_1$  是矩阵  $B$  的特征向量, 并求  $B$  的全部特征值的特征向量;

(II) 求矩阵  $B$ .

**【详解】:**

(I) 可以很容易验证  $A^n \alpha_1 = \lambda_1^n \alpha_1 (n=1, 2, 3, \dots)$ , 于是

$$B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_1 = (\lambda_1^5 - 4\lambda_1^3 + 1)\alpha_1 = -2\alpha_1$$

于是  $\alpha_1$  是矩阵  $B$  的特征向量.

$B$  的特征值可以由  $A$  的特征值以及  $B$  与  $A$  的关系得到, 即

$$\lambda(B) = \lambda(A)^5 - 4\lambda(A)^3 + 1,$$

所以  $B$  的全部特征值为  $-2, 1, 1$ .

前面已经求得  $\alpha_1$  为  $B$  的属于  $-2$  的特征值, 而  $A$  为实对称矩阵,

于是根据  $B$  与  $A$  的关系可以知道  $B$  也是实对称矩阵, 于是属于不同的特征值的特征向量正交, 设  $B$  的属于  $1$  的特征向量为  $(x_1, x_2, x_3)^T$ , 所以有方程如下:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

于是求得  $B$  的属于  $1$  的特征向量为  $\alpha_2 = (-1, 0, 1)^T, \alpha_3 = (1, 1, 0)^T$

(II) 令矩阵  $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 则  $P^{-1}BP = \text{diag}(-2, 1, 1)$ , 所以

$$B = P \cdot \text{diag}(-2, 1, 1) \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{diag}(-2, 1, 1) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$