

2007 年考研数学二真题

一. 选择题 (本题共 10 小题, 每小题 4 分, 满分 40 分, 在每小题给的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是 ()

A. $1 - e^{\sqrt{x}}$ B. $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ C. $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ D. $1 - \cos \sqrt{x}$

(2) 函数 $f(x) = \frac{(e^x + e^{-x}) \tan x}{x(e^x - e^{-x})}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是 $x =$ ()

A. 0 B. 1 C. $-\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{2}$

(3) 如图. 连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2], [2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2, 0], [0, 2]$ 上图形分别是直径为 2 的上、下半圆周, 设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则下列结论正确的是: ()

A. $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$ B. $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$
 C. $F(-3) = -\frac{3}{4}F(2)$ D. $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是 ()

A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$ B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, $f(0) = 0$
 C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0) = 0$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, $f(0) = 0$

(5) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$, 渐近线的条数为 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(6) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 令 $u_n = f(n) = 1, 2, \dots, n$, 则下列结论正确的是 ()

A. 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 B. 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散
 C. 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 D. 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

(7) 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件是 ()

A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$
 B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$

C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x,0) - f'_x(0,0)] = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(x,0) - f'_y(0,0)] = 0$,

(8) 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于 ()

A. $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$ B. $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dy$

C. $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$ D. $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$

(9) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是: ()

(A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ (B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

(C) $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$ (D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$

(10) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 于 B, ()

(A) 合同, 且相似 (B) 合同, 但不相似

(C) 不合同, 但相似 (D) 既不合同, 也不相似

二. 填空题: 11-16 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上

(11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 曲线 $\begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$ 上对应于 $t = \frac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$

(13) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^n(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(15) 设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(16) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为_____.

三、解答题: 17-24 小题, 共 86 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) 设 $f(x)$ 是区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调、可导函数, 且满足 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x t \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt$,

其中 f^{-1} 是 f 的反函数, 求 $f(x)$.

(18) (本题满分 11 分)

设 D 是位于曲线 $y = \sqrt{xa} - - (a > 1, 0 \leq x < +\infty)$ 下方、 x 轴上方的无界区域.

(I) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$;

(II) 当 a 为何值时, $V(a)$ 最小? 并求此最小值.

(19) 求微分方程 $y''(x + y'^2) = y'$ 满足初始条件 $y(1) = y'(1) = 1$ 的特解.

(20) 已知函数 $f(a)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0) = 1$, 函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 所确

定. 设 $z = f(\ln y - \sin x)$, 求 $\frac{dz}{dx} \Big|_{x=0}$, $\frac{d^2z}{dx^2} \Big|_{x=0}$.

(21) (本题 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值,

$f(a) = g(a), f(b) = g(b)$ 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(22) (本题满分 11 分)

设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1. \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 \leq |x| + |y| \leq 2. \end{cases}$

计算二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$. 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$

(23) (本题满分 11 分)

设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$

与方程 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad (2)$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解

(24) 设 3 阶对称矩阵 A 的特征向量值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的

一个特征向量, 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$ 其中 E 为 3 阶单位矩阵

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值的特征向量;

(II) 求矩阵 B .

2007 年考研数学二真题解析

一. 选择题 (本题共 10 小题, 每小题 4 分, 满分 40 分, 在每小题给的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后括号内)

(2) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是 (B)

A. $1 - e^{\sqrt{x}}$ B. $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ C. $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ D. $1 - \cos \sqrt{x}$

(2) 函数 $f(x) = \frac{(e^x + e^{-x}) \tan x}{x(e^x - e^{-x})}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是 $x =$ (A)

A. 0 B. 1 C. $-\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{2}$

(3) 如图. 连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2], [2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2, 0], [0, 2]$ 上图形分别是直径为 2 的上、下半圆周, 设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则下列结论正确的是: (C)

A. $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$ B. $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$
 C. $F(-3) = -\frac{3}{4}F(2)$ D. $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是 (C)

A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$ B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, $f(0) = 0$
 C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0) = 0$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, $f(0) = 0$

(5) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$, 渐近线的条数为 (D)

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(6) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 令 $u_n = f(n) = 1, 2, \dots, n$, 则下列结论正确的是 (D)

A. 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 B. 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散
 C. 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 D. 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

(7) 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件是 (B)

A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$
 B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$

C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x,0) - f'_x(0,0)] = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(x,0) - f'_y(0,0)] = 0$,

(8) 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于 (B)

A. $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$ B. $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dy$

C. $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$ D. $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$

(9) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是: (A)

(A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ (B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

(C) $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$ (D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$

(10) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 于 B, (B)

(A) 合同, 且相似 (B) 合同, 但不相似

(C) 不合同, 但相似 (D) 既不合同, 也不相似

二. 填空题: 11-16 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上

(11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$.

(12) 曲线 $\begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$ 上对应于 $t = \frac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为 $(\sqrt{2} - 1)$.

(13) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^n(0) = 2 \cdot 3^{-n}$.

(14) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解 $y = -C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}$.

(15) 设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{x} f'_1\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right) + \frac{2x}{y} f'_2\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right).$$

(16) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为 1_____.

三、解答题: 17-24 小题, 共 86 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) 设 $f(x)$ 是区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调、可导函数, 且满足 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x t \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt$,

其中 f^{-1} 是 f 的反函数, 求 $f(x)$.

【详解】:

设 $y = f(t)$, 则 $t = f^{-1}(y)$.

$$\text{则原式可化为: } \int_{f^{-1}(0)}^x y f'(y) dy = \int_0^x t \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt$$

$$\text{等式两边同时求导得: } x f'(x) = x \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

(18) (本题满分 11 分)

设 D 是位于曲线 $y = \sqrt{xa} - - (a > 1, 0 \leq x < +\infty)$ 下方、 x 轴上方的无界区域.

(I) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$;

(II) 当 a 为何值时, $V(a)$ 最小? 并求此最小值.

【详解】:

$$(I) V(a) = \int_0^{+\infty} \pi y^2 dx = \int_0^{+\infty} \pi (\sqrt{xa} - \frac{x}{2a})^2 dx = \frac{a^2 \pi}{(\ln a)^2}$$

$$(II) V'(a) = \pi \cdot \frac{2a(\ln a)^2 - a^2(2 \ln a) \frac{1}{a}}{(\ln a)^4} = 0 \text{ 得 } \ln a(\ln a - 1) = 0$$

$$\text{故 } \ln a = 1$$

$$\text{即 } a = e \text{ 是唯一驻点, 也是最小值点, 最小值 } V(e) = e^2 \pi$$

(19) 求微分方程 $y''(x + y'^2) = y'$ 满足初始条件 $y(1) = y'(1) = 1$ 的特解.

【详解】:

$$\text{设 } p = y' = \frac{dy}{dx}, \text{ 则 } y'' = \frac{dp}{dx} \text{ 代入得:}$$

$$\frac{dp}{dx}(x+p^2) = p \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{x+p^2}{p} = \frac{x}{p} + p$$

$$\text{设 } \frac{x}{p} = u \quad \text{则 } \frac{d(pu)}{dp} = u + p \Rightarrow u + p \frac{du}{dp} = u + p \Rightarrow \frac{du}{dp} = 1 \Rightarrow u = p + c_1$$

$$\text{即 } x = p^2 + c_1 p \quad \text{由于 } y'(1) = 1$$

$$\text{故 } 1 = 1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\text{即 } x = p^2 \Rightarrow p = \pm\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{x} \Rightarrow y = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c_2$$

$$\text{由 } y(1) = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{3} \text{ 或 } c_2 = \frac{5}{3}$$

$$\text{特解为 } y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} \text{ 或 } y = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{3}$$

(20) 已知函数 $f(a)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0) = 1$, 函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 所确

定. 设 $z = f(\ln y - \sin x)$, 求 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0}$, $\left. \frac{d^2z}{dx^2} \right|_{x=0}$.

【详解】:

$$y - xe^{y-1} = 1 \text{ 两边对 } x \text{ 求导得 } y' - (e^{y-1} + xe^{y-1} \cdot y') = 0$$

$$\text{得 } y' = \frac{e^{y-1}}{1 - xe^{y-1}} \quad (\text{当 } x=0, y=1)$$

$$\text{故有 } y' \Big|_{x=0} = \frac{e^{1-1}}{2-1} = 1$$

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0} = f'(\ln y - \sin x) \left(\frac{1}{y} y' - \cos x \right) \Big|_{x=0} = f'(0)(1 \times 1 - 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2z}{dx^2} \right|_{x=0} &= f''(\ln y - \sin x) \left(\frac{1}{y} y' - \cos x \right)^2 + f'(\ln y - \sin x) \left(-\frac{(y')^2}{y^2} + \sin x \right) \Big|_{x=0} \\ &= f''(0)(1 \times 1 - 1)^2 + f'(0) \left(\frac{-1}{1^2} \times 1 + 0 \right) = 1 \times (-1) = -1 \end{aligned}$$

(21) (本题 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值,

$f(a) = g(a), f(b) = g(b)$ 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

【详解】:

证明: 设 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内某点 $c \in (a, b)$ 同时取得最大值, 则 $f(c) = g(c)$, 此时的 c

就是所求点 η 使得 $f(\eta) = g(\eta)$. 若两个函数取得最大值的点不同则有设

$f(c) = \max f(x), g(d) = \max g(x)$ 故有 $f(c) - g(c) > 0, g(d) - f(d) < 0$, 由介值定理,

在 (c, d) 内肯定存在 η 使得 $f(\eta) = g(\eta)$ 由罗尔定理在区间 $(a, \eta), (\eta, b)$ 内分别存在一点

ξ_1, ξ_2 , 使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ 在区间 (ξ_1, ξ_2) 内再用罗尔定理, 即

存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

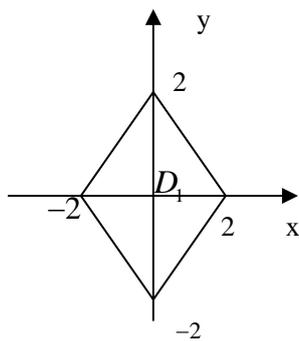
(22) (本题满分 11 分)

设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1. \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 \leq |x| + |y| \leq 2. \end{cases}$

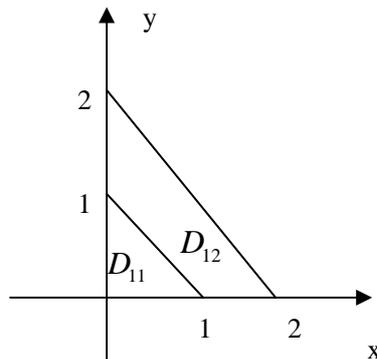
计算二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$. 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$

【详解】: D 如图 (1) 所示, 它关于 x, y 轴对称, $f(x, y)$ 对 x, y 均为偶函数, 得

$\iint_D f(x, y) d\sigma = 4 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma$, 其中 D_1 是 D 的第一象限部分.



(1)



(2)

由于被积函数分块表示, 将 D_1 分成 (如图 (2)): $D_1 = D_{11} \cup D_{12}$, 且

$D_{11}: |x| + |y| \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ $D_{12}: 1 \leq |x| + |y| \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$

于是 $\iint_{D_1} f(x, y) d\sigma = \iint_{D_{12}} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_{12}} f(x, y) d\sigma$. 而

$$\iint_{D_{11}} f(x, y) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy = \int_0^1 x^2 (1-x) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_{12}} f(x, y) d\sigma &= \iint_{D_{12}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta + \sin\theta}} \frac{1}{r} \cdot r dr \text{ (极坐标变换)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2d(\tan\frac{\theta}{2})}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2} + 2\tan\frac{\theta}{2}} = \int_0^1 \frac{2du}{1 - u^2 + 2u} = \int_0^1 \frac{2du}{2 - (u-1)^2} \\ &= \int_0^1 \frac{2dt}{2-t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}+t} + \frac{1}{\sqrt{2}-t} \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

所以

$$\iint_{D_1} f(x, y) d\sigma = \frac{1}{12} + \frac{2}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1)$$

得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 4 \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1) \right)$$

(23) (本题满分 11 分)

$$\text{设线性方程组} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{与方程 } x_1 + 2x_2 + x_3 = a-1 \quad (2)$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

【详解】:

因为方程组(1)、(2)有公共解, 即由方程组(1)、(2)组成的方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a-1 \end{cases} \quad (3) \text{ 的解.}$$

$$\text{即矩阵} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+3a+4 & 0 \end{pmatrix} \text{方程组(3)有解的充要条件为}$$

$$a=1, a=2.$$

当 $a=1$ 时, 方程组(3)等价于方程组(1)即此时的公共解为方程组(1)的解. 解方程组(1)的基础解系为 $\xi = (1, 0, -1)^T$ 此时的公共解为: $x = k\xi, k=1, 2, \dots$

$$\text{当 } a=2 \text{ 时, 方程组(3)的系数矩阵为} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{此时方程组(3)}$$

的解为 $x_1=0, x_2=1, x_3=-1$, 即公共解为: $k(0, 1, -1)^T$

(24) 设 3 阶对称矩阵 A 的特征向量值 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=-2$, $\alpha_1=(1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量, 记 $B=A^5-4A^3+E$ 其中 E 为 3 阶单位矩阵

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值的特征向量;

(II) 求矩阵 B .

【详解】:

(I) 可以很容易验证 $A^n\alpha_1 = \lambda_1^n\alpha_1 (n=1, 2, 3, \dots)$, 于是

$$B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_1 = (\lambda_1^5 - 4\lambda_1^3 + 1)\alpha_1 = -2\alpha_1$$

于是 α_1 是矩阵 B 的特征向量.

B 的特征值可以由 A 的特征值以及 B 与 A 的关系得到, 即

$$\lambda(B) = \lambda(A)^5 - 4\lambda(A)^3 + 1,$$

所以 B 的全部特征值为 $-2, 1, 1$.

前面已经求得 α_1 为 B 的属于 -2 的特征值, 而 A 为实对称矩阵,

于是根据 B 与 A 的关系可以知道 B 也是实对称矩阵, 于是属于不同的特征值的特征向量正交, 设 B 的属于 1 的特征向量为 $(x_1, x_2, x_3)^T$, 所以有方程如下:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

于是求得 B 的属于 1 的特征向量为 $\alpha_2 = (-1, 0, 1)^T, \alpha_3 = (1, 1, 0)^T$

(II) 令矩阵 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $P^{-1}BP = \text{diag}(-2, 1, 1)$, 所以

$$B = P \cdot \text{diag}(-2, 1, 1) \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{diag}(-2, 1, 1) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$