

2003 年全国硕士研究生入学统一考试理工

数学二试题详解及评析

一、 填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(1) 若 $x \rightarrow 0$ 时, $(1-ax^2)^{\frac{1}{4}} - 1$ 与 $x \sin x$ 是等价无穷小, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答】 -4

【详解】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1-ax^2)^{\frac{1}{4}} - 1 \sim -\frac{1}{4}ax^2$, $x \sin x \sim x^2$.

于是, 根据题设有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2} = -\frac{1}{4}a = 1$,

故 $a = -4$.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy + 2 \ln x = y^4$ 所确定, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答】 $x-y=0$

【详解】 等式 $xy + 2 \ln x = y^4$ 两边直接对 x 求导, 得

$$y + xy' + \frac{2}{x} = 4y^3 y',$$

将 $x=1, y=1$ 代入上式, 有 $y'(1) = 1$.

故过点 $(1,1)$ 处的切线方程为

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 1), \text{ 即 } x - y = 0.$$

(3) $y = 2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答】 $\frac{(\ln 2)^n}{n!}$

【详解】 因为 $y' = 2^x \ln 2$, $y'' = 2^x (\ln 2)^2$, $\dots, y^{(x)} = 2^x (\ln 2)^n$,

于是有 $y^{(n)}(0) = (\ln 2)^n$,

故麦克劳林公式中 x^n 项的系数是

$$\frac{y^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(\ln 2)^n}{n!}.$$

(4) 设曲线的极坐标方程为 $\rho = e^{a\theta}$ ($a > 0$) , 则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为 _____.

【答】 $\frac{1}{4a}(e^{4\pi a} - 1)$

【详解】 所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{2a\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{4a} e^{2a\theta} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4a} (e^{4\pi a} - 1). \end{aligned}$$

(5) 设 α 为 3 维列向量, α^T 是 α 的转置. 若 $\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则

$\alpha^T\alpha =$ _____ .

【答】 3

【详解】 方法一:

$$\text{由 } \alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{知 } \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

于是

$$\alpha^T\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3.$$

方法二:

$$\text{设 } \alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

$$\text{则 } \alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2 \end{bmatrix},$$

由题设 $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = 1$, 所以 $\alpha^T\alpha = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$.

(6) 设三阶方阵 A, B 满足 $A^2B - A - B = E$, 其中 E 为三阶单位矩阵, 若

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } |B| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答】 $\frac{1}{2}$

【详解】 由 $A^2B - A - B = E$ 知,

$$(A^2 - E)B = A + E, \text{ 即 } (A + E)(A - E)B = A + E,$$

易知矩阵 $A + E$ 可逆, 于是有 $(A - E)B = E$.

再两边取行列式, 得 $|A - E||B| = 1$,

因为 $|A - E| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2,$

所以 $|B| = \frac{1}{2}.$

二、选择题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

- (A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立. (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.
(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

【 】

【答】 应选 (D)

【详解】 用举反例法, 取 $a_n = \frac{2}{n}, b_n = 1, c_n = \frac{1}{2}n (n = 1, 2, \dots)$, 则可立即排除(A),(B),(C), 因此正确选项为(D).

(2) 设 $a_n = \frac{3}{2} \int_0^n x^{n-1} \sqrt{1+x^n} dx$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ 等于

- (A) $(1+e)^{\frac{3}{2}} + 1.$ (B) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} - 1.$
(C) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} + 1.$ (D) $(1+e)^{\frac{3}{2}} - 1.$

【 】

【答】 应选 (B)

【详解】 因为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1} \sqrt{1+x^n} dx = \frac{3}{2n} \int_0^{\frac{n}{n+1}} \sqrt{1+x^n} d(1+x^n) \\ &= \frac{1}{n} (1+x^n)^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{n} \left\{ \left[1 + \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right]^{\frac{3}{2}} - 1 \right\}, \end{aligned}$$

可见 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[1 + \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right]^{\frac{3}{2}} - 1 \right\} = (1 + e^{-1})^{\frac{3}{2}} - 1.$

(3) 已知 $y = \frac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ 的解, 则 $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ 的表达式为

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} & -\frac{y^2}{x^2}. \\ \text{(B)} & \frac{y^2}{x^2}. \\ \text{(C)} & -\frac{x^2}{y^2}. \\ \text{(D)} & \frac{x^2}{y^2}. \end{array}$$

【 】

【答】 应选 (A)

【详解】 方法一:

将 $y = \frac{x}{\ln x}$ 代入微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, 得

$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} + \varphi(\ln x), \text{ 即 } \varphi(\ln x) = -\frac{1}{\ln^2 x}.$$

令 $\ln x = u$, 有 $\varphi(u) = -\frac{1}{u^2}$, 故 $\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{y^2}{x^2}.$

应选(A).

方法二:

$$\text{令 } \frac{y}{x} = u, \quad u + x \frac{du}{dx} = y' \Rightarrow u + xu' = u + \varphi\left(\frac{1}{u}\right),$$

即有
$$\frac{du}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)} = \frac{1}{x} dx.$$

从而
$$\int \frac{du}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)} = \ln x,$$

而 $y = \frac{x}{\ln x}$ 为解, 得 $\int \frac{du}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)} = \frac{x}{y} = \frac{1}{u},$

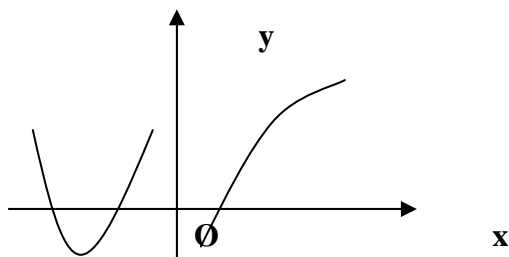
两边求导, 得 $\varphi\left(\frac{1}{u}\right) = -u^2$, 从而 $\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = -\left(\frac{y^2}{x^2}\right).$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 $f(x)$ 有

- (A) 一个极小值点和两个极大值点.
- (B) 两个极小值点和一个极大值点.
- (C) 两个极小值点和两个极大值点.
- (D) 三个极小值点和一个极大值点.

【 】

【答】 应选 (C)



【详解】 方法一：

根据导函数的图形可知, 一阶导数为零的点有 3 个, 而 $x=0$ 则是导数不存在的点. 三个一阶导数为零的点左右两侧导数符号不一致, 必为极值点, 且两个极小值点, 一个极大值点; 在 $x=0$ 左侧一阶导数为正, 右侧一阶导数为负, 可见 $x=0$ 为极大值点, 故 $f(x)$ 共有两个极小值点和两个极大值点, 应选(C).

方法二：

设 $f'(x)=0$ 的根从左至右为 x_1, x_2, x_3 , 导数不存在的点为 0, 以上述点将

$(-\infty, +\infty)$ 分为若干个区间列表如下：

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, 0)$	0	$(0, x_3)$	x_3	$(x_3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+		-	0	+

$f(x)$

(5) 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$, 则

- (A) $I_1 > I_2 > 1$. (B) $1 > I_1 > I_2$.
(C) $I_2 > I_1 > 1$. (D) $1 > I_2 > I_1$.

【 】

【详解】 因为当 $x > 0$ 时, 有 $\tan x > x$, 于是

$$\frac{\tan x}{x} > 1, \frac{x}{\tan x} < 1,$$

$$\text{从而有 } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx > \frac{\pi}{4}, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx < \frac{\pi}{4},$$

可见有 $I_1 > I_2$ 且 $I_2 < \frac{\pi}{4}$, 可排除(A),(C),(D),

故应选(B).

(6) 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则

- (A) 当 $r < s$ 时, 向量组 II 必线性相关. (B) 当 $r > s$ 时, 向量组 II 必线性相关.
(C) 当 $r < s$ 时, 向量组 I 必线性相关. (D) 当 $r > s$ 时, 向量组 I 必线性相关.

[D]

【详解】 用排除法: 如

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } \alpha_1 = 0 \cdot \beta_1 + 0 \cdot \beta_2, \text{ 但 } \beta_1, \beta_2 \text{ 线性无关, 排除(A);}$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } \alpha_1, \alpha_2 \text{ 可由 } \beta_1 \text{ 线性表示, 但 } \beta_1 \text{ 线性无关, 排除}$$

$$(B); \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_1 \text{ 可由 } \beta_1, \beta_2 \text{ 线性表示, 但 } \alpha_1 \text{ 线性无关, 排除}$$

(C). 故正确选项为(D).

三、(本题满分 10 分)

$$\text{设函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0, \\ 6, & x = 0, \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x > 0, \end{cases}$$

问 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续; a 为何值时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点?

$$\text{【详解】 } f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3}{x - \arcsin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -6a.$$

$$f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}$$

$$= 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ae^{ax} + 2x - a}{2x} = 2a^2 + 4.$$

令 $f(0-0) = f(0+0)$, 有 $-6a = 2a^2 + 4$, 得 $a = -1$ 或 $a = -2$.

当 $a = -1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6 = f(0)$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

当 $a = -2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 12 \neq f(0)$, 因而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

四、(本题满分9分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 2t^2, \\ y = \int_1^{1+2\ln t} \frac{e^u}{u} du \end{cases} (t > 1)$ 所确定, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=9}$.

$$\text{【详解】 由 } \frac{dy}{dt} = \frac{e^{1+2\ln t}}{1+2\ln t} \cdot \frac{2}{t} = \frac{2et}{1+2\ln t}, \quad \frac{dx}{dt} = 4t,$$

得 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2et}{1+2\ln t}}{4t} = \frac{e}{2(1+2\ln t)},$

$$\begin{aligned}\text{所以 } \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e}{2} \cdot \frac{-1}{(1+2\ln t)^2} \cdot \frac{2}{t} \cdot \frac{1}{4t} \\ &= -\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2}.\end{aligned}$$

当 $x=9$ 时, 由 $x=1+2t^2$ 及 $t>1$ 得 $t=2$, 故

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=9} = -\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2} \Big|_{t=2} = -\frac{e}{16(1+2\ln 2)^2}.$$

五、(本题满分9分)

计算不定积分 $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$.

【详解】 方法一：

设 $x = \tan t$, 则

$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \int \frac{e^t \tan t}{(1+\tan^2 t)^{3/2}} \sec^2 t dt = \int e^t \sin t dt.$$

$$\text{又 } \int e^t \sin t dt = -\int e^t d \cos t$$

$$= -(e^t \cos t - \int e^t \cos t dt)$$

$$= -e^t \cos t + e^t \sin t - \int e^t \sin t dt,$$

$$\text{故 } \int e^t \sin t dt = \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t) + C.$$

$$\text{因此 } \int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{2} e^{\arctan x} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) + C$$

$$= \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$$

方法二：

本题也可用分部积分法：

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} de^{\arctan x} \\ &= \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} de^{\arctan x} \\
&= \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx,
\end{aligned}$$

移项整理得

$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$$

六、(本题满分 12 分)

设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y' \neq 0$, $x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 变换为 $y=y(x)$ 满

足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解.

【详解】(1) 由反函数的求导公式知 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$, 于是有

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y'} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{-y''}{y'^2} \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}.$$

代入原微分方程得

$$y'' - y = \sin x. \quad (*)$$

(2) 方程(*)所对应的齐次方程 $y'' - y = 0$ 的通解为

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

设方程(*)的特解为

$$y^* = A \cos x + B \sin x,$$

代入方程(*), 求得 $A = 0, B = -\frac{1}{2}$, 故 $y^* = -\frac{1}{2} \sin x$, 从而 $y'' - y = \sin x$ 的通解是

$$y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x.$$

由 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$, 得 $C_1 = 1, C_2 = -1$. 故所求初值问题的解为

$$y = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x.$$

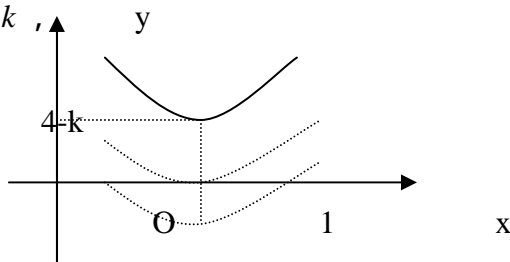
七、(本题满分 12 分)

讨论曲线 $y = 4\ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数.

【详解】 设 $\varphi(x) = \ln^4 x - 4\ln x + 4x - k$,

则有
$$\varphi'(x) = \frac{4(\ln^3 x - 1 + x)}{x}.$$

不难看出, $x=1$ 是 $\varphi(x)$ 的驻点.



当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 即 $\varphi(x)$ 单调减少; 当 $x > 1$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 即 $\varphi(x)$ 单调增加, 故 $\varphi(1) = 4 - k$ 为函数 $\varphi(x)$ 的最小值.

当 $k < 4$, 即 $4 - k > 0$ 时, $\varphi(x) = 0$ 无实根, 即两条曲线无交点;

当 $k = 4$, 即 $4 - k = 0$ 时, $\varphi(x) = 0$ 有唯一实根, 即两条曲线只有一个交点;

当 $k > 4$, 即 $4 - k < 0$ 时, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x (\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x (\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty,$$

故 $\varphi(x) = 0$ 有两个实根, 分别位于 $(0, 1)$ 与 $(1, +\infty)$ 内, 即两条曲线有两个交点.

方法二:

问题等价于讨论方程 $k = 4x - 4\ln x + \ln^4 x$ 的实根个数.

设 $f(x) = 4x - 4\ln x + \ln^4 x$, 则
$$f'(x) = \frac{4(x - 1 + \ln^3 x)}{x},$$

令 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x = 1$.

又 $f(1) = 4,$

从而

当 $k < 4$, 即 $4 - k > 0$ 时, 方程 $f(x) = k$ 无实根, 即两条曲线无交点;

当 $k = 4$, 即 $4 - k = 0$ 时, 方程 $f(x) = k$ 有唯一实根, 即两条曲线只有一个交点;

当 $k > 4$, 即 $4 - k < 0$ 时, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x (\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x (\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

所以方程 $f(x) = k$ 有两个实根分别位于 $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内, 即两曲线有两个交点.

八、(本题满分 12 分)

设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$ 过点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, 其上任一点 $P(x, y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q , 且线段 PQ 被 x 轴平分.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 的方程;

(2) 已知曲线 $y=\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的弧长为 l , 试用 l 表示曲线 $y=f(x)$ 的弧长 s .

【详解】(1) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

其中 (X, Y) 为法线上任意一点的坐标. 令 $X=0$, 则

$$Y = y + \frac{x}{y'},$$

故 Q 点的坐标为 $(0, y + \frac{x}{y'})$. 由题设知

$$\frac{1}{2}(y + y + \frac{x}{y'}) = 0, \text{ 即 } 2ydy + xdx = 0.$$

积分得 $x^2 + 2y^2 = C$ (C 为任意常数).

由 $y \Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$ 知 $C=1$, 故曲线 $y=f(x)$ 的方程为

$$x^2 + 2y^2 = 1.$$

(2) 曲线 $y=\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的弧长为

$$l = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx.$$

曲线 $y=f(x)$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

故 $s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t + \frac{1}{2} \cos^2 t} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 t} dt,$

令 $t = \frac{\pi}{2} - u$, 则

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 + \cos^2 u} (-du) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 u} du \\ &= \frac{l}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} l. \end{aligned}$$

九、(本题满分 10 分)

有一平底容器, 其内侧壁是由曲线 $x = \varphi(y) (y \geq 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面 (如图), 容器的底面圆的半径为 2 m. 根据设计要求, 当以 $3\text{ m}^3/\text{min}$ 的速率向容器内注入液体时, 液面的面积将以 $\pi\text{ m}^2/\text{min}$ 的速率均匀扩大 (假设注入液体前, 容器内无液体).

(1) 根据 t 时刻液面的面积, 写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式;

(2) 求曲线 $x = \varphi(y)$ 的方程.

(注: m 表示长度单位米, min 表示时间单位分.)

【详解】 方法一:

(1) 设在 t 时刻, 液面的高度为 y , 则由题设知:

此时液面的面积为 $\pi\varphi^2(y) = 4\pi + \pi t$, 从而 $t = \varphi^2(y) - 4$.

(2) 液面的高度为 y 时, 液体的体积为

$$\pi \int_0^y \varphi^2(u) du = 3t = 3\varphi^2(y) - 12.$$

上式两边对 y 求导, 得

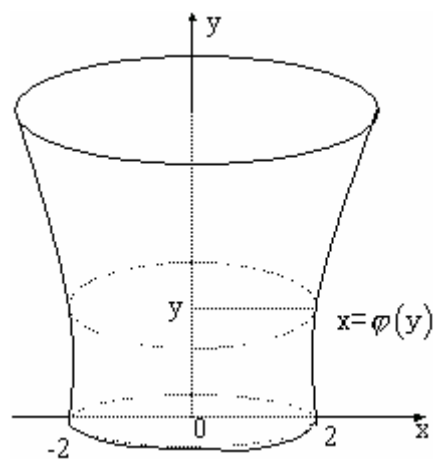
$$\pi\varphi^2(y) = 6\varphi(y)\varphi'(y), \text{ 即 } \pi\varphi(y) = 6\varphi'(y).$$

解此微分方程, 得

$$\varphi(y) = Ce^{\frac{\pi}{6}y}, \text{ 其中 } C \text{ 为任意常数,}$$

由 $\varphi(0) = 2$ 知 $C=2$,

故所求曲线方程为 $x = 2e^{\frac{\pi}{6}y}$.



方法二：

(1) 在 t 时刻液面面积为 $2^2\pi + \pi t$, 由题意 $\pi x^2 = 4\pi + \pi t$, 于是 t 与 $\varphi(y)$ 的关系为： $\varphi^2(y) = 4 + t$.

(2) 设液面高度为 y , 在 $t \sim t + dt$ 时间间隔为液体体积的变化为：
 $3dt = (4\pi + \pi t) dy$,

解此微分方程得

$$y = \frac{3}{\pi} \ln(4 + t) + C.$$

$$t = 0 \text{ 时}, y = 0 \Rightarrow C = -\frac{3}{\pi} \ln 4,$$

$$\text{从而 } y = \frac{3}{\pi} \ln \frac{4+t}{4}.$$

$$\text{由 } t = \varphi^2(y) - 4 \text{ 得 } y = \frac{3}{\pi} \ln \frac{x^2}{4}.$$

$$\text{又 } \varphi(0) = 2 \Rightarrow \text{曲线方程为 } x = 2e^{\frac{\pi}{6}y}.$$

十、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) > 0$. 若极限

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x - a)}{x - a} \text{ 存在, 证明:}$$

(1) 在 (a, b) 内 $f(x) > 0$;

(2) 在 (a, b) 内存在点 ξ , 使

$$\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)};$$

(3) 在 (a, b) 内存在与 (2) 中 ξ 相异的点 η , 使

$$f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a} \int_a^b f(x)dx.$$

【详解】 方法一：

(1) 因为 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，故 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(2x-a) = f(a) = 0$. 又 $f'(x) > 0$ ，于是 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加，故

$$f(x) > f(a) = 0, x \in (a, b).$$

(3) 设 $F(x) = x^2, g(x) = \int_a^x f(t)dt (a \leq x \leq b)$ ，则 $g'(x) = f(x) > 0$ ，

故 $F(x), g(x)$ 满足柯西中值定理的条件，于是在 (a, b) 内存在点 ξ ，使

$$\frac{F(b) - F(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt} = \frac{(x^2)'}{(\int_a^x f(t)dt)'} \Big|_{x=\xi},$$

即
$$\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x)dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)}.$$

(3) 因 $f(\xi) = f(\xi) - f(0) = f(\xi) - f(a)$ ，在 $[a, \xi]$ 上应用拉格朗日中值定理，

知在 (a, ξ) 内存在一点 η ，使 $f(\xi) = f'(\eta)(\xi - a)$ ，从而由(2) 的结论得

$$\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x)dx} = \frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi - a)},$$

即有
$$f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a} \int_a^b f(x)dx.$$

方法二：

(1) 同证法一.

(2) 设 $F(x) = x^2 \int_a^b f(t)dt - (b^2 - a^2) \int_a^x f(t)dt$,

显然 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且

$$F(b) = b^2 \int_a^b f(t)dt - (b^2 - a^2) \int_a^b f(t)dt = a^2 \int_a^b f(t)dt,$$

$$F(a) = a^2 \int_a^b f(t)dt - (b^2 - a^2) \int_a^a f(t)dt = a^2 \int_a^b f(t)dt.$$

由罗尔定理， $\exists \xi \in (a, b)$ ，使 $F'(\xi) = 0$ ，

即
$$2\xi \int_a^b f(t)dt = (b^2 - a^2)f(\xi), \text{ 或 } \frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(t)dt} = \frac{2\xi}{f(\xi)}.$$

(3) 由(1)及(2)知

$$F'(x) = 2x \int_a^b f(t)dt - (b^2 - a^2)f(x),$$

$$F'(x) - F'(a) = 2(\xi - a) \int_a^b f(t)dt - (b^2 - a^2)f(\xi).$$

由拉个朗日定理, $\exists \eta \in (a, \xi)$, 使得

$$F''(\eta) = \frac{F'(\xi) - F'(a)}{\xi - a}, \text{ 即 } f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a} \int_a^b f(x)dx.$$

十 一、(本题满分 10 分)

若矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 相似于对角阵 Λ , 试确定常数 a 的值; 并求可逆矩阵 P

使 $P^{-1}AP = \Lambda$.

【详解】 矩阵 A 的特征多项式为

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -8 & \lambda - 2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 6)[(\lambda - 2)^2 - 16] \\ &= (\lambda - 6)^2(\lambda + 2), \end{aligned}$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -2$.

由于 A 相似于对角矩阵 Λ , 故对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 应有两个线性无关的特征向量, 即

$$3 - r(6E - A) = 2, \text{ 于是有 } r(6E - A) = 1.$$

$$\text{由 } 6E - A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

知 $a=0$.

于是对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 的两个线性无关的特征向量可取为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

当 $\lambda_3 = -2$ 时,

$$-2E - A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases}$ 得对应于 $\lambda_3 = -2$ 的特征向量 $\xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

令 $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 P 可逆, 并有 $P^{-1}AP = \Lambda$.

十二、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax + 2by + 3c = 0,$$

$$l_2: bx + 2cy + 3a = 0,$$

$$l_3: cx + 2ay + 3b = 0.$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a + b + c = 0$.

【详解】 方法一：必要性

设三条直线 l_1, l_2, l_3 交于一点, 则线性方程组

$$\begin{cases} ax + 2by = -3c, \\ bx + 2cy = -3a, \\ cx + 2ay = -3b, \end{cases} \quad (*)$$

有唯一解, 故系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & 2c \\ c & 2a \end{bmatrix}$ 与增广矩阵 $\bar{A} = \begin{bmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{bmatrix}$ 的秩均为 2, 于

是 $|\bar{A}| = 0$.

$$\text{由于 } |\bar{A}| = \begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix} = 6(a+b+c)[a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc]$$

$$= 3(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2],$$

但根据题设 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \neq 0$, 故

$$a + b + c = 0.$$

充分性：由 $a+b+c=0$ ，则从必要性的证明可知， $|\bar{A}|=0$ ，故秩 $(\bar{A})<3$.

由于

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} &= 2(ac-b^2) = -2[a(a+b)+b^2] \\ &= -2[(a+\frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2] \neq 0,\end{aligned}$$

故秩 $(A)=2$. 于是，

$$\text{秩}(A)=\text{秩}(\bar{A})=2.$$

因此方程组(*)有唯一解，即三直线 l_1, l_2, l_3 交于一点.

方法二：必要性

设三直线交于一点 (x_0, y_0) ，则 $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的非零解，其中

$$A = \begin{bmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{bmatrix}.$$

于是 $|A|=0$.

$$\begin{aligned}\text{而 } |A| &= \begin{vmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix} = -6(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc] \\ &= -3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],\end{aligned}$$

但根据题设 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \neq 0$ ，故

$$a+b+c=0.$$

充分性：考虑线性方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a, \\ cx+2ay=-3b, \end{cases} \quad (*)$$

将方程组(*)的三个方程相加，并由 $a+b+c=0$ 可知，方程组(*)等价于方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a. \end{cases} \quad (* *)$$

$$\text{因为 } \begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2(ac-b^2) = -2[a(a+b)+b^2]$$

$$= -[a^2 + b^2 + (a+b)^2] \neq 0,$$

故方程组(*)有唯一解, 所以方程组(*)有唯一解, 即三直线 l_1, l_2, l_3 交于一点.