2023 年全国硕士研究生招生考试（数学三）试题及答案解析

1.已知函数 $f(x,y)=\ln\left(y+|x\sin y|\right)$，则

A. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 不存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 存在.　　B. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 不存在.

C. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均存在.　　D. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均不存在.

【答案】A

【解析】

$f(x,y)=\ln(y+|x\sin y|)$，$f(0,1)=\ln(1+0)=0, f(x,1)=\ln(1+|x\sin 1|)$

$f(0,y)=\ln(1+0)=0$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,1)-f(0,1)}{x-0.}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x\sin 1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x\sin 1|}{x}\text{不存在}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,1)}{y-0}=0$$

故选 A.

2.函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\le 0,\\ (x+1)\cos x, & x>0\end{cases}$ 的一个原函数为

A. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x), & x\le 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0.\end{cases}$

B. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1, & x\le 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0.\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x), & x\le 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$

D. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+1, & x\le 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$

【答案】D

【解析】

$$\int(x+1)\cos x\mathrm{d}x=\int(x+1)\mathrm{d}\sin x=(x+1)\sin x-\int\sin x\mathrm{d}x=(x+1)\sin x+\cos x+c$$

故排除 AB，由于 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=1\neq\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=0$，排除 C，故选 D.

3.若微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则

A. $a<0,b>0$.　　B. $a>0,b>0$.

C. $a=0,b>0$.　　D. $a=0,b<0$.

【答案】C

【解析】当 $y''+ay'+by=0$ 有实根时，$a^2-4b\geqslant0$，设根为 r_1,r_2，则 $y=c_1\mathrm{e}^{r_1x}+c_2\mathrm{e}^{r_2x}$ 或 $y=(c_1+c_r)\mathrm{e}^{r_1x}\ (r_1=r_2)$．故此时存在解在（-∞，+∞）有界．当 $a^2-4b<0$ 时. $y=(c_1\cos\beta x+c_2\cos\beta x)\mathrm{e}^{ax}$,若想解在（-∞，+∞）有界，因此 a=0，结合 $a^2-4b<0$ 可得 b＞0.故选 C.

4.已知 $a_n<b_n\ (n=1,2,\cdots)$，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，则“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛”是“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛”的

A.充分必要条件.　　B.充分不必要条件.

C.必要不充分条件.　　D.既不充分也不必要条件.

【答案】A

【解析】由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n-b_n|$ 收敛.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，由 $|a_n|=|b_n+a_n-b_n|\leqslant|b_n|+|a_n-b_n|$，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，$|b_n|=|a_n+b_n-a_n|\leqslant|a_n|+|b_n-a_n|$，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛.

故选 A.

5.设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{M}^*$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的伴随矩阵，则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^* =$

A. $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$.

B. $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$.

D. $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$.

【答案】D

【解析】$\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & B \end{bmatrix}^* = \begin{vmatrix} A & E \\ 0 & B \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1A & X_1+X_2B \\ X_3A & X_3+X_4B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & B \end{bmatrix}^* = |A|\cdot|B|\cdot\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B|\cdot A^* & -A^*B^* \\ 0 & |A|\cdot B^* \end{bmatrix}.$$

6 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$ 的规范形为

A. $y_1^2+y_2^2$ B. $y_1^2-y_2^2$ C. $y_1^2+y_2^2-4y_3^2$ D. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

【答案】B

【解析】$f(x_1,x_2x_3)=2x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -3-\lambda & 4 \\ 1 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & 7+\lambda & -7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -3\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 7+\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$=(7+\lambda)\lambda(3-\lambda)$. 故选 B.

7.已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，也可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\gamma}=$

A. $k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$　　B. $k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$　　C. $k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$　　D. $k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$

【答案】D

【解析】

$\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2$，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2=0$，

$$\begin{cases}x_1=k_1\\x_2=k_2\\x_3=-l_1\\x_4=-1_2\end{cases}\quad x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$$

$$\begin{cases}x_1=3k\\x_2=-k\end{cases},\boldsymbol{\gamma}=3k\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}-k\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\5\\8\end{bmatrix}.$$

8.设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $E\left(\left|X-EX\right|\right)=$

A. $\frac{1}{\mathrm{e}}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{\mathrm{e}}$　　D.1

【解析】C

【答案】$E(|X-1|)=E(X-1)+2\cdot P\{X=0\}=0+2\mathrm{e}^{-1}=2\mathrm{e}^{-1}$.

9.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N\left(\mu_1,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 为来自总体 $N\left(\mu_2,2\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，且两样本相互独立，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i,S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2,S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2$，则

A. $\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n,m)$ B. $\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1,m-1)$

C. $\dfrac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n,m)$ D. $\dfrac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1,m-1)$

【答案】D

【解析】$\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \quad \dfrac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$

$$\frac{\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}/n-1}{\dfrac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2}/m-1} = \frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1,m-1).$$

10. 设 X_1, X_2 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 $\sigma(\sigma>0)$ 是未知参数.记 $\widehat{\sigma} = a|X_1-X_2|$，若 $E(\widehat{\sigma}) = \sigma$，则 $a =$

A. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ B. $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$ C. $\sqrt{\pi}$ D. $\sqrt{2\pi}$

【答案】A

【解析】$E\left(a|X_1-X_2|\right) = aE\left(|X_1-X_2|\right) = a\cdot\dfrac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} = \sigma, \quad a = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

其中：$X_1 - X_2 \sim N\left(0, 2\sigma^2\right)$，令 $Z = X_1 - X_2$

$$E\left(|X_1-X_2|\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} \cdot e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} dz = 2\int_0^{+\infty} \frac{z}{2\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} dz$$

$$= 2\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}\left(-2\sigma^2\right)\int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} d\left(-\frac{z^2}{4\sigma^2}\right) = -\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

二、填空题

11. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(2 - x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}\right) =$ ________.

【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解析】

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(2-x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left(2-\frac{1}{t}\sin t-\cos t\right)=\lim_{t\to 0}\frac{2t-\sin t-t\cos t}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2t-\left(t-\frac{1}{6}t^3\right)-t\left(1-\frac{1}{2}t^2\right)+o\left(t^3\right)}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{6}t^3\cdot+\frac{1}{2}t^3}{t^3}=\frac{2}{3}$$

12. 已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\mathrm{d}f(x,y)=\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, $f(1,1)=\dfrac{\pi}{4}$, 则 $f(\sqrt{3},3)=$ ________.

【答案】$\dfrac{\pi}{12}$

【解析】$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$， $f(x,y)=-\arctan\dfrac{x}{y}+c(y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}+c'(y)=\frac{x}{x^2+y^2}+c'(y),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}，\ 故\ c'(y)=0，\ c(y)=0$$

$$f(1,1)=\frac{\pi}{4},\quad c=\frac{\pi}{4},\quad f(x,y)=-\arctan\frac{x}{y}+\frac{\pi}{4}$$

$$f(\sqrt{3},3)=-\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$$

13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=$ ________.

【答案】$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

【解析】$e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$， $e^{-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{n!}$， $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

14.设某公司在t时刻的资产为$f(t)$，从 0 时刻到t时刻的平均资产等于$\frac{f(t)}{t}-t$，假设$f(t)$连续且$f(0)=0$，则$f(t)=$________.

【答案】$f(t)=2(1-t)-2e^{t}$

【解析】

$$f'(t)-2t=f(t)$$

$$f'(t)=f(t)+2t$$

$$f'(t)-f(t)=2t$$

$$f(t)=e^{-\int -1dt}\left[\int 2te^{\int -1dt}dt+c\right]=e^{t}\left[\int 2t\cdot e^{-t}dt+c\right]$$

$$=2e^{t}\left[(1-t)e^{-t}+c\right]=2(1-t)+2ce^{t}$$

$$f(0)=2+2c=0\Rightarrow c=-1$$

$$f(t)=2(1-t)-2e^{t}$$

15.已知线性方程组$\begin{cases}ax_1+x_3=1,\\x_1+ax_2+x_3=0,\\x_1+2x_2+ax_3=0,\\ax_1+bx_2=2\end{cases}$有解，其中$a,b$为常数，若$\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=4$，则$\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=$________.

【答案】8

【解析】

$$\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=4\neq 0\text{ ， } r\begin{bmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{bmatrix}=3\text{ ， } r\begin{pmatrix}a&0&1&1\\1&a&1&0\\1&2&a&0\\a&b&0&2\end{pmatrix}=3\text{ ， }\begin{vmatrix}a&0&1&1\\1&a&1&0\\1&2&a&0\\a&b&0&2\end{vmatrix}=0\text{ ，}$$

$$1\begin{vmatrix}1 & a & 1\\1 & 2 & a\\a & b & 0\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}a & 0 & 1\\1 & a & 1\\1 & 2 & a\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}1 & a & 1\\1 & 2 & a\\a & b & 0\end{vmatrix}=8$$

16.设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim B(1,p), Y \sim B(2,p), p\in(0,1)$,则 $X+Y$ 与 $X-Y$ 的相关系数为__________.

【答案】 $p(p-1)$

【解析】
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)&=DX-DY\\&=p(1-p)-2p(1-p)\\&=-p(1-p)=p(p-1)\end{aligned}$$

三、解答题

17. 已知可导函数 $y=y(x)$ 满足 $ae^x+y^2+y-\ln(1+x)\cos y+b=0$, 且 $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

(1)求 a,b 的值；

(2)判断 $x=0$ 是否为 $y(x)$ 的极值点.

【解析】

（1）将 $(0,0)$ 代入得 $a+b=0$

将 $y'(0)=0$ 代入 $ae^x+2yy'+y'-\dfrac{1}{1+x}\cos y+\ln(1+x)(\sin y)y'=0$

得 $a+0-1=0$，所以 $a=1\quad b=-1$

（2）由 $e^x+2yy'+y'-\dfrac{1}{1+x}\cos y+\ln(1+x)\sin y\cdot y'=0$

两边对 x 求导，得：

$$e^x+2(y')^2+2yy''+y''+\frac{1}{(1+x)^2}\cos y+\frac{1}{1+x}\sin y$$
$$+\frac{1}{1+x}\sin y\cdot y'+\ln(1+x)\left[\cos y\cdot(y')^2+\sin yy'\right]=0$$

代入，得 $1+y''(0)+1=0$， $y''(0)=-2<0$， $x=0$ 为极大值.

18.已知平面区域 $D=\{(x,y)|\,0\le y\le \dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\ge 1\}$.

(1)求 D 的面积;

(2)求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

【解析】

$$(1)\ \int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx\overset{x=\tan t}{=}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan t\cdot\sec t}\cdot\sec^2 t dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t}{\tan t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\csc t dt=\ln(\sqrt{2}+1)$$

$$(2)\ \int_1^{+\infty}\pi\left(\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\right)^2dx=\int_1^{+\infty}\pi\frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)}dx=\int_1^{+\infty}\pi\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\pi(1-\frac{\pi}{4})$$

19. 已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+y^2\le 1\}$. 计算二重积分 $\iint\limits_D|\sqrt{x^2+y^2}-1|\,dxdy$.

【解析】

$$D_1=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leqslant 1,\quad (x-1)^2+y^2\le 1\}$$

$$D_2=\left\{(x,y)|\ x^2+y^2>1\quad,\quad (x-1)^2+y^2\le 1\right\}$$

$$\text{原式}=\iint\limits_{D_1}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy+\iint\limits_{D_2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)dxdy$$

$$\text{其中}\iint\limits_{D_1}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta\int_0^1(1-r)rdr+2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(1-r)rdr=\frac{13}{18}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{10}{9}$$

$$\iint\limits_{D_2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)dxdy=\iint\limits_{D}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)dxdy-\iint\limits_{D_1}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(r-1)rdr$$
$$+\iint\limits_{D_1}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$
$$=\frac{22}{9}-\frac{5}{18}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

所以原式$=\frac{4}{3}+\frac{4}{9}\pi-\sqrt{3}$.

20.（12 分）设函数 $f(x)$在$[-a,a]$上具有 2 阶连续导数，证明：

（1）若 $f(0)=0$，则存在 $\xi\in(-a,a)$，使得 $f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$;

（2）若 $f(x)$在（$-a,a$）内取得极值，则存在 $\eta\in(-a,a)$ 使得

$$\left|f''(\eta)\right|\geq\frac{1}{2a^2}\left|f(a)-f(-a)\right|.$$

【解析】

(1) $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$

则 $f(a)=f'(0)a+\frac{1}{2}f''(\varepsilon_2)a^2$，$f(-a)=f'(0)(-a)+\frac{1}{2}f''(\varepsilon_1)a^2$，其中 $\xi_1\in(-a,0)$，$\xi_2\in(0,a)$.

$$f(-a)+f(a)=\frac{1}{2}\left[f''(\varepsilon_1)+f''(\varepsilon_2)\right]a^2$$

由介值定理可知平均值 $\frac{1}{2}\left[f''(\varepsilon_1)+f''(\varepsilon_2)\right]=\frac{f(-a)+f(a)}{a^2}=f''(\xi),\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-a,a)$,

$\therefore$ 即证

(2)

设$f(x)$在$x=x_0$处取得极值 即$x_0\in(-a\cdot a),f'(x_0)=0$

$$\therefore f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$$

代入 $x=-a,\ x=a$

$$f(-a)=f(x_0)+\frac{f''(\eta_1)}{2}(a+x_0)^2\quad(1)\ ,\eta_1\in(-a,x_0)$$

$$f(a)=f(x_0)+\frac{f''(n_1)}{2}(a-x_0)^2\quad(2)\ ,\eta_2\in(x_0,a)$$

(2) - (1) 得

$$f(a)-f(-a)=\frac{f'(\eta_2)}{2}(a-x_0)^2-\frac{f''(\eta_1)}{2}(a+x_0)^2$$

$$|f(a)-f(-a)|=\left|\frac{f''(\eta_2)}{2}(a-x_0)^2-\frac{f''(\eta_1)}{2}(a+x_0)^2\right|$$

$$\le\left|\frac{f''(\eta)}{2}(a-x_0)^2\right|+\left|\frac{f''(\eta)}{2}(a+x_0)^2\right|$$

$$\le\left|\frac{f''(\eta)}{2}\right|\left[(a-x_0)^2+(a+x_0)^2\right]$$

$$=\left(\frac{f''(\eta)}{2}\right)\left(2a^2+2x_0^2\right)$$

$$=|f''(\eta)|\left(a^2+x_0{}^2\right)$$

$\le\ \left|f''(\eta)\right|\cdot 2a^2$， 其中$f''(\eta)=\max\left\{f''(\eta_1)\cdot f''(\eta_2)\right\},\eta\in(-a,a)$

$\therefore\left|f''(\eta)\right|\geqslant\ \dfrac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$.

21.设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足对任意 x_1,x_2,x_3 均有 $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}$.

（1）求 $\boldsymbol{A}$;

（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

【解析】

(1) 由题可知，$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$\therefore\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

(2) $|A-\lambda E|=-(2+\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)=0$

$\therefore A$ 中$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=-1,\quad \lambda_3=-2$

A 中λ_1对应的线性无关特征向量$\alpha_1=(4,3,1)^T$.

A 中λ_2对应的线性无关特征向量$\alpha_2=\left(-\frac{1}{2},0,1\right)^T$

A 中λ_3对应的线性无关特征向量$\alpha_3=(0,-1,1)^T$

$\therefore p=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -2\end{pmatrix}$$

22.设随机变量变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2},-\infty<x<+\infty$, 令 $Y=e^x$.

（1）求 X 的分布函数；

（2）求 Y 的概率密度；

（3）Y 的期望是否存在？

【解析】

(1) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad (-\infty<x<+\infty)$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{\left(1+e^t\right)^2}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{d\left(e^t+1\right)}{\left(1+e^t\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{1+e^t}\bigg|_{-\infty}^{x}$$

$$=1-\frac{1}{1+e^x}$$

(2) 当 $y>0$ 时

$$f_Y(y)=f_X(\ln y)\cdot\left|\frac{1}{y}\right|=\frac{y}{(1+y)^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{(1+y)^2}$$

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+y)^2} & y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

(3) $EY=\int_0^{+\infty}\frac{y}{(1+y)^2}\mathrm{d}y$，$\frac{y}{(1+y)^2}\sim\frac{1}{y}$，所以期望不存在.