2023 年全国硕士研究生招生考试（数学一）试题及答案解析

一、选择题

1.曲线 $y = x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程为

A.$y = x+\mathrm{e}$.

B.$y = x+\frac{1}{\mathrm{e}}$.

C.$y = x$.

D.$y = x-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

【答案】B

【解析】 $y = x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right), k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right) = \ln\mathrm{e} = 1$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y-x) = \lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)-x\right]$$

令 $\frac{1}{x-1} = t$

$$= \lim_{t\to0}\left[\left(\frac{1}{t}+1\right)\ln(\mathrm{e}+t)-\left(\frac{1}{t}+1\right)\right] = \lim_{t\to0}\frac{(1+t)\ln(\mathrm{e}+t)-(t+1)}{t}$$

$$= \lim_{t\to0}\frac{\ln(\mathrm{e}+t)+(1+t)\cdot\frac{1}{\mathrm{e}+t}-\frac{1}{t+1}}{1} = \ln\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}-1 = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

$y = x+\frac{1}{\mathrm{e}}$.

2.若微分方程 $y''+ay'+by = 0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则

A. $a<0,b>0$.

B. $a>0,b>0$.

C. $a=0,b>0$.

D. $a=0,b<0$.

【答案】C

【解析】 当 $y''+ay'+by = 0$ 有实根时，$a^2-4b\geqslant0$，设根为 r_1,r_2，则 $y = c_1\mathrm{e}^{r_1x}+c_2\mathrm{e}^{r_2x}$ 或

$y=\left(c_1+c_r\right)e^{r_1x}\left(r_1=r_2\right)$. 故此时存在解在（-∞，+∞）有界. 当 $a^2-4b<0$ 时. $y=\left(c_1\cos\beta x+c_2\cos\beta x\right)e^{ax}$,若想解在（-∞，+∞）有界，因此 a =0，结合 $a^2-4b<0$ 可得 b＞0.故选 C.

3.设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases}x=2t+|t|,\\ y=|t|\sin t\end{cases}$ 确定，则

A. $f(x)$连续, $f'(0)$不存在

B. $f'(0)$存在, $f'(x)$在$x=0$处不连续.

C. $f'(x)$连续, $f''(0)$不存在.

D. $f''(0)$存在, $f''(x)$在$x=0$处不连续.

【答案】 C

【解析】 $\begin{cases}x=2t+|t|\\ y=|t|\sin t\end{cases}$

当$t\geqslant 0$, $\begin{cases}x=3t\\ y=t\sin t\end{cases}$，即 $x\geqslant 0$, $y=\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{x}{3}$

当$t<0$, $\begin{cases}x=t\\ y=-t\sin t\end{cases}$, $x<0$ 时 $y=-x\sin x$

$$y'=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{9}\cos\dfrac{x}{3} & x>0\\ 0 & x=0\\ -\sin x-x\cos x & x<0\end{cases}, \lim_{x\to 0}y'(x)=y'(0)=0, y'(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续.}$$

$y''_+(0)=\dfrac{2}{9}$， $y''_-(0)=-2$， $y''(0)$不存在.

故选 C.

4.已知 $a_n<b_n\left(n=1,2,\cdots\right)$，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，则“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛”是“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛”的

A.充分必要条件.

B.充分不必要条件.

C.必要不充分条件. D.既不充分也不必要条件.

【答案】A

【解析】由级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$均收敛，可知$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n - b_n\right|$收敛.

若$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$绝对收敛，由$|a_n| = |b_n + a_n - b_n| \leqslant |b_n| + |a_n - b_n|$，可知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛.

若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛，$|b_n| = |a_n + b_n - a_n| \leqslant |a_n| + |b_n - a_n|$，可知$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$绝对收敛.

故选 A.

5. 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 记矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$的秩分别为$r_1, r_2, r_3$，则

A.$r_1 \le r_2 \le r_3$.

B.$r_1 \le r_3 \le r_2$.

C.$r_3 \le r_1 \le r_2$.

D.$r_2 \le r_1 \le r_3$.

【答案】B

【解析】

对于$\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}$，将分块矩阵$-\boldsymbol{A}$的第二行加到第一行，即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{ABC} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}$$ 故，$r_1 = n$

对于$\begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}$,将分块矩阵的第二行的$-\boldsymbol{C}$倍加到第一行，即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}$$

$$r_2 = r(\boldsymbol{AB}) + r(\boldsymbol{E}) = r(\boldsymbol{AB}) + n$$

对于$\begin{bmatrix} E & AB \\ AB & O \end{bmatrix}$,将分块矩阵的第一行的$-AB$倍加到第二行，即

$\begin{bmatrix} E & AB \\ AB & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & AB \\ AB & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & AB \\ O & -ABAB \end{bmatrix}$,再将分块矩阵的第一列$-AB$倍的加到第二列，

即$\begin{bmatrix} E & AB \\ O & -ABAB \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & -AB \\ O & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & O \\ O & -ABAB \end{bmatrix}$

$r_3 = r(E)+r(-ABAB)$,又因为$0 \le r(-ABAB) \le r(AB)$

故$r_1 \leqslant r_3 \leqslant r_2$,选 B.

6.下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.　B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$.　C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.　D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

【答案】D

【解析】A 中矩阵的特征值不同,分别为 1、2、3;B 中矩阵为实对称矩阵;C 中矩阵特征值 2 为二重根，对应的线性无关特征向量个数为 2;D 中矩阵的特征值 2 为二重根，特征值 2 对应的线性无关特征向量个数为 1，不可对角化，故选 D

7.已知向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，若$\boldsymbol{\gamma}$既可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，线性表示，也可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性表示，则$\boldsymbol{\gamma}=$

A. $k\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},k \in \mathbf{R}$.　B. $k\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix},k \in \mathbf{R}$.　C. $k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},k \in \mathbf{R}$.　D. $k\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix},k \in \mathbf{R}$.

【答案】D

【解析】

$\boldsymbol{\gamma}= k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2$，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2=0$，

$$\begin{cases} x_1 = k_1 \\ x_2 = k_2 \\ x_3 = -l_1 \\ x_4 = -1_2 \end{cases} \quad x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 + x_4\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3k \\ x_2 = -k \end{cases}, \boldsymbol{\gamma} = 3k\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - k\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} = k\begin{bmatrix}1\\5\\8\end{bmatrix}.$$

8.设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $E(|X-EX|)=$

A. $\frac{1}{e}$.　　B. $\frac{1}{2}$.　　C. $\frac{2}{e}$.　　D.1.

【解析】 C

【答案】

$E(|X-1|) = E(X-1) + 2\cdot P\{X=0\} = 0 + 2e^{-1} = 2e^{-1}$.

9.设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N\left(\mu_1, \sigma^2\right)$ 的简单随机样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 为来自总体 $N\left(\mu_2, 2\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，且两样本相互独立，

记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i, S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2, S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$，则

A. $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n,m)$

B. $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1,m-1)$

C. $\frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n,m)$

D. $\frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1,m-1)$

【答案】 D

【解析】 $$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\quad \frac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$$

$$\frac{\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}/n-1}{\frac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2}/m-1}=\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1).$$

10. 设 X_1,X_2 为来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，其中 $\sigma\left(\sigma>0\right)$ 是未知参数.记若 $\hat{\sigma}=a\left|X_1-X_2\right|$ 是 σ 的无偏估计,则 $a=$

A. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$　　C. $\sqrt{\pi}$　　D. $\sqrt{2\pi}$

【答案】A

【解析】 $E\left(a\left|X_1-X_2\right|\right)=aE\left(\left|X_1-X_2\right|\right)=a\cdot\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}=\sigma,\quad a=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

其中：$X_1-X_2\sim N\left(0,2\sigma^2\right)$,令 $Z=X_1-X_2$

$$E\left(\left|X_1-X_2\right|\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma}\cdot e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}dz=2\int_0^{+\infty}\frac{z}{2\sqrt{\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}dz$$

$$=2\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}\left(-2\sigma^2\right)\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}d\left(-\frac{z^2}{4\sigma^2}\right)=-\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

二、填空题

11. 当 $x\to0$ 时，函数 $f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$ 与 $g(x)=e^{x^2}-\cos x$ 是等价无穷小，则 $ab=$______.

【答案】-2.

【解析】 $$\lim_{x\to0}\frac{ax+bx^2+\ln(1+x)}{e^{x^2}-\cos x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax+bx^2+\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)}{1+x^2-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}=1$$

$$\Rightarrow (a+1)=0 \quad b-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow a=-1,b=2\Rightarrow ab=-2.$$

12. 曲面 $z=x+2y+\ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $(0,0,0)$ 处的切平面方程为______.

【答案】$x+2y-z=0$.

【解析】

$z=x+2y+\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

令 $F(x,y,z)=z-x-2y-\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

$$F_x'=-1-\frac{2x}{1+x^2+y^2},F_x'(0,0,0)=-1$$

$$F_y'=-2-\frac{2y}{1+x^2+y^2},F_y'(0,0,0)=-2$$

$F_z'=1$,故平面方程为 $x+2y-z=0$

13. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=1-x,x\in[0,1]$. 若 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$,

则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=$______.

【答案】0

【解析】 $f(x)=\frac{a_n}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$ 因此 $f(x)$ 做偶延拓

$$a_n=2\int_0^1(1-x)\cdot\cos n\pi x dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^1(1-x)\mathrm{d}\sin n\pi x$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[(1-x)\sin n\pi x\Big|_0^1+\int_0^1 \sin n\pi x\right]\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\cdot\int_0^1 \sin n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1=-\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1=-\frac{2\left[(-1)^n-1\right]}{n^2\pi^2}=\frac{2\left[1-(-1)^n\right]}{n^2\pi^2}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=0$.

14. 设连续函数 $f(x)$ 满足： $f(x+2)-f(x)=x,\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0,$ 则 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$，由于 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$

所以原式为 $=-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$ ，由于 $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x+2)\mathrm{d}x$ ，故原式 $=\int_0^1[f(x+2)-f(x)]\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

15. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$. 若 $\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$, 则 $k_1^2+k_2^2+k_3^2=$ ______.

【答案】 $\frac{11}{9}$

$$(k_1,k_2,k_3)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\\boldsymbol{\alpha}_2^T\\\boldsymbol{\alpha}_3^T\end{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}_i\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_i^T(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\beta}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}3&0&0&1\\0&3&0&-3\\0&0&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{3}\\0&1&0&-1\\0&0&1&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\Rightarrow(k_1,k_2,k_3)=\left(\frac{1}{3},-1,\frac{1}{3}\right)\Rightarrow k_1^2+k_2^2+k_3^2=\frac{11}{9}.$$

16. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim B(1,\frac{1}{3}),Y\sim B(2,\frac{1}{2})$, 则 $P\{X=Y\}=$______.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

$$\begin{aligned}p(x=y)&=p(x=0,y=0)+p(x=1,y=1)\\&=p(x=0)p(y=0)+p(x=1)p(y=1)\\&=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2\\&=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

三、解答题

17.(本题满分 10 分)

设曲线 $y=y(x)(x>0)$ 经过点 $(1,2)$ ，该曲线上任一点 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

（1）求 $y(x)$;

（2）求函数 $f(x)=\int_1^x y(t)dt$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值.

【解析】

由题意得$y=y'(x-x)+y$切线，切线在y轴上的截距为$-x\cdot y'+y$

则$x=-x\cdot y'+y$.

$y'-\frac{y}{x}=-1$.

$$y(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int +e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+c\right]$$

$$=x\left[\int\frac{1}{x}dx+c\right]$$

$$=x(-\ln x+c)$$

又$x=1$,　$y=2$　则 $c=2$ 因此 $y(x)=x(-\ln x+2)$

(2) $f'(x)=y(x)=x(-\ln x+2)=0$

则$x=0$ 或 $x=e^2$.

又$x>0$故$f(x)$的驻点为$x=e^2$

$$f''(x)=-\ln x+2+x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$f'\left(e^2\right)=-2+2-1=-1<0$$

故$f\left(\mathrm{e}^2\right)$为最大值，最大值为$\int_1^{\mathrm{e}^2} x(-\ln x+2)\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^4-5}{4}$

18.（本题满分 12 分）

求函数$f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$的极值.

【解析】

$$f(x,y)=\left(y-x^2\right)\left(y-x^3\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=5x^4-2xy-3x^2y=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=y-x^3+y-x^2=2y-x^2-x^3=0$$

得$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$, $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$, $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\y=\dfrac{10}{27}\end{cases}$

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=20x^3-2y-6xy, B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2x-3x^2, C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2.$$

对于 $x=0,y=0;A=0,B=0,C=2.$ 取 $y=x^{\frac{5}{2}},f(x,y)<0$，取 $y=x$，$f(x,y)>0$

故 $x=0,y=0$ 不是极值点

$(2)x=1,y=1.A=12,B=-5,C=2,AC-B^{2}=24-25<0.$ 故 $(1,1)$ 不是极值点.

$(3)x=\frac{2}{3},y=\frac{10}{27},A=\frac{100}{27},B=-\frac{8}{3},C=2$，$AC-B^{2}>0$ $f\left(\frac{2}{3},\frac{10}{27}\right)=-\frac{4}{729}$ 为极小值

19.（本题满分 12 分）

设空间有界区域 Ω 由柱面 $x^{2}+y^{2}=1$ 与平面 z=0 和 x+z=1 围成. Σ 为 Ω 的边界曲面的外侧.

计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma}2xzdydz+xz\cos ydzdx+3yz\sin xdxdy.$$

【解析】

由高斯公式可得

$$I=\iiint_{\Omega}2z-xz\sin y+3y\sin xdv$$

三重积分先一后二积分得

$$I=\iint_{x^{2}+y^{2}\le1}dxdy\int_{0}^{1-x}(2z-xz\sin y+3y\sin x)dz$$

$$=\iint_{x^{2}+y^{2}\le1}\left(1+x^{2}\right)dxdy$$

$$=\pi+\frac{1}{2}\iint_{x^{2}+y^{2}\le1}\left(y^{2}+x^{2}\right)dxdy$$

$$=\pi+\frac{1}{2}\cdot4\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{0}^{1}r^{3}dr$$

$$=\frac{5}{4}\pi$$

20.(本题满分12分）

设函数$f(x)$在$[-a,a]$上具有2阶连续导数 证明：

(1)若$f(0)=0$,则存在$\xi\in(-a,a)$，使得$f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$；

(2)若$f(x)$在$(-a,a)$内取得极值，则存在$\eta\in(-a,a)$，使得

$|f''(\eta)|\geq\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$.

【解析】

（1） $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$

则 $f(a)=f'(0)a+\frac{1}{2}f''(\varepsilon_2)a^2$，$f(-a)=f'(0)(-a)+\frac{1}{2}f''(\varepsilon_1)a^2$，其 中 $\xi_1\in(-a,0)$，

$\xi_2\in(0,a)$.

$f(-a)+f(a)=\frac{1}{2}\left[f''(\varepsilon_1)+f''(\varepsilon_2)\right]a^2$

由介值定理可知平均值$\frac{1}{2}\left[f''(\varepsilon_1)+f''(\varepsilon_2)\right]=\frac{f(-a)+f(a)}{a^2}=f''(\xi),\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-a,a)$,

$\therefore$ 即证

（2）

设$f(x)$在$x=x_0$处取得极值 即$x_0\in(-a\cdot a),f'(x_0)=0$

$\therefore f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$

代入 $x=-a,\ x=a$

$f(-a)=f(x_0)+\frac{f''(\eta_1)}{2}(a+x_0)^2$ (1) ,$\eta_1\in(-a,x_0)$

$f(a)=f(x_0)+\frac{f''(n_1)}{2}(a-x_0)^2$ (2) ,$\eta_2\in(x_0,a)$

(2) - (1) 得

$$f(a)-f(-a)=\frac{f'(\eta_2)}{2}(a-x_0)^2-\frac{f''(\eta_1)}{2}(a+x_0)^2$$

$$|f(a)-f(-a)|=\left|\frac{f''(\eta_2)}{2}(a-x_0)^2-\frac{f''(\eta_1)}{2}(a+x_0)^2\right|$$

$$\leq\left|\frac{f''(\eta)}{2}(a-x_0)^2\right|+\left|\frac{f''(\eta)}{2}(a+x_0)^2\right|$$

$$\leq\left|\frac{f''(\eta)}{2}\right|\left[(a-x_0)^2+(a+x_0)^2\right]$$

$$=\left(\frac{f''(\eta)}{2}\right)(2a^2+2x_0^2)$$

$$=|f''(\eta)|(a^2+x_0{}^2)$$

$\leq\ |f''(\eta)|\cdot 2a^2$， 其中$f''(\eta)=\max\{f''(\eta_1)\cdot f''(\eta_2)\},\eta\in(-a,a)$

$\therefore|f''(\eta)|\geqslant\ \frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|.$

21.（本题满分12分）

已知二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3$,

$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3$.

(1)求可逆变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$将$f(x_1,x_2,x_3)$化成$g(y_1,y_2,y_3)$;

(2)是否存在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$将$f(x_1,x_2,x_3)$化成$g(y_1,y_2,y_3)$？

【解析】

$$(1)A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&2&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$f=x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2^2+2x_3^2$

$=\left(x_1+x_2-x_3\right)^2-x_2^2-x_3^2+2x_2x_3+2x_2^2+2x_3^2$

$=\left(x_1+x_2-x_3\right)^2+\left(x_2+x_3\right)^2$

$=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=y_1-y_2+y_3\\x_2=y_2\\x_3=y_3\end{cases}\qquad P=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$(2)\ |\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\-1&\lambda-2&0\\1&0&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$=\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$

λ=0,2,3

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-1&-1\\0&-1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$

λ=0,1,2

特征值不同, 故不存在.

22. （本题满分12分）

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}(x^2+y^2), & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

求:(1)求X与Y的协方差;

(2)X与Y是否相互独立?

(3)求$Z=X^2+Y^2$的概率密度.

$(1)EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2xy}{\pi}\left(x^2+y^2\right)dxdy=0$

$EX=0,EY=0$

$Cov(X,Y)=0$

(2)不独立

（3） $F_z(z)=p\left\{x^2+y^2\leqslant z\right\}$

当 $z<0$ 时 $F_Z(z)=0$

当 $z\geq 1$ 时 $F_Z(z)=1$

当 $0\leqslant z<1$ 时

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\frac{2}{\pi}r^3dr\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}z^2d\theta=z^2\end{aligned}$$

所以 $f_Z(z)=\begin{cases}2z, & 0<z<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$